5.3.2.2 微物理素過程

(1) 核形成

- 一次氷晶発生メカニズム： 均質、不均質核形成による氷晶の生成
- 二次氷晶発生メカニズム ：氷晶同士の衝突などによる氷晶の分裂など

(a) 一次氷晶発生メカニズム

- 均質核生成
  - 均質昇華核形成 : 水蒸気から直接氷晶を形成する
    → 高過飽和状態から凝結するので現実の大気では起らない
  - 均質凍結核形成 ： 水滴の凍結から氷晶を形成する
    サイズ依存性あり (-35 ℃ at 100μm, -37.5 ℃ at 10μm, -40.7 ℃ at 1μm :小さい方が核生成しにくい[1])
- 不均質核生成 : 氷晶核（エアロゾル[2] の存在）
  - 不均質昇華核形成 ： 昇華核（deposition nuclei)
  - 不均質凍結核形成
    * 凝結凍結核 (condensation freezing nuclei): まず水滴が凝結し、その後凍結[3]
    * 接触凍結核 (contact nuclei)：水滴に核が接触して凍結

---

[1]核生成率が同じ場合、小さい方が核化はしにくいから

[2]主に大気中に舞上がった土壌粒子中の粘土鉱物

[3]氷晶核は一般に非吸湿性物質であるが、凝結凍結核は吸湿性の性質を持つ

* 内部凍結核 (immersion nuclei)： もともと水滴に含まれる微粒子により凍結

氷晶核に関する理解はまだ不十分であり、ここでは昇華核、内部凍結核、接触凍結核のみについて述べる。

昇華核

昇華核数密度[4] には温度や湿度の依存性があることが知られている。昇華核数密度の温度依存性の（観測的）経験式 (Fletcher 1962) は

$$N_I = N_{I0} \exp\{\beta_2(T_0 - T)\} \tag{0.1}$$

と表される。但し、$N_{I0} = 1.0 \times 10^{-2} \mathrm{m}^{-3}$,$\beta_2 = 0.6 \mathrm{K}^{-1}$, $T_0 = 0$ ℃である（雲と雨の気象学 p.72 参照）N_{I0} は２桁、 β_2 は factor 2 程度の不定性がある。またこの経験式が使える温度範囲も限られている[5] 。一方、昇華核の氷過飽和度に対する依存性を示す実験式 (Huffmann and Vali 1973) は

$$N_I^* = A \left[\frac{S_I - 1}{S_0 - 1}\right]^B \tag{0.2}$$

と表される。但し、$B = 4.5$, $S_I - 1$ は空気塊の氷過飽和度、$S_0 - 1$ は水過飽和度である[6] 。(0.2) を (0.1) に代入して

$$N_I = N_{I0} \exp\{\beta_2(T_0 - T)\} \left[\frac{S_I - 1}{S_{WI} - 1}\right]^B \tag{0.3}$$

[4]昇華核とは氷晶が生成するエアロゾル粒子のことであり、昇華核数密度の時間変化は氷晶発生率に対応している。

[5]ちなみに、核生成理論では核生成率は飽和比（$:S = p_v/p_e$）に依存し、$J \propto \exp[-\eta^3 f_1/(\ln S)^2]$ の関係がある（前期の核生成セミナーレジュメ参照）

[6]過飽和度は $S_I - 1 = 100(S - 1)$ と定義される。但し、 S は飽和比。氷過飽和度とは氷の飽和蒸気圧を用いたもので、水過飽和度は水の飽和蒸気圧を用いたもの。

と表す[7]。これまで、(0.3) が長く用いられてきた。しかし、最近の実験は昇華核数密度が温度ではなく、むしろ氷過飽和度に依存することが示されている。昇華核の活性化は雲の上昇による氷過飽和度の増加により起る。ここでは、氷過飽和度を $SS_I(= S_I - 1)$ とし、昇華核の活性化速度（氷晶発生速度）:NUA_{viN} を以下で表す[8]。

$$NUA_{viN} = \frac{\partial N_I}{\partial t} = \frac{\partial N_I}{\partial SS_I}\frac{\partial SS_I}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = 15.25\exp(5.17 + 15.25 SS_I)\frac{dSS_I}{dz}w \tag{0.4}$$

不均質凍結: 内部凍結

内部凍結は凍結核の大きさ、物理化学的性質（界面エネルギー等)、温度、雲粒の大きさなどにも依存するが、ここでは Bigg の実験式を用いる。

$$NUF_{ci} = B'[\exp\{A'(T_0 - T)\} - 1]\frac{\bar{\rho} q_c^2}{\rho_W N_C} \tag{0.5}$$

但し、$B' = 100$ ($\mathrm{m^{-3}s^{-1}}$),$A' = 0.66$ ($\mathrm{K^{-1}}$), N_C は雲粒の数濃度。

簡単のため単一の質量 m の場合を考えると、$q_c = mN_c/\bar{\rho}$ より、

$$\frac{dN_c}{dt} = NUF_{ciN} = \frac{N_c}{\tau_c} \tag{0.6}$$

$$\tau_c = [\exp\{A'(T_0 - T)\} - 1]^{-1}\frac{\rho_W \bar{\rho}}{B' m^2} \tag{0.7}$$

となり、１個当りの雲粒の凍結時間 τ_c は質量と温度に依る[9]。

---

[7] S_{WI} は空気塊の温度に対する水飽和水蒸気圧に対する氷過飽和度と書いてあるが、定義式がはっきり書かれていない。セミナーでは（１）$S_{WI} - 1 = 100[(p_{e,l}/p_{e,s}) - 1]$、と（２） $S_{WI} - 1 = 100[(p_v/p_{e,l}) - 1]$ の (T ¡ 0 ℃) 説が出た (但し、$p_{e,l}$, $p_{e,s}$ はそれぞれ水飽和蒸気圧と氷飽和蒸気圧。他の文献（Cress）によると、（１）が正しいようである。

[8] (0.1) と同様に、$N_I = N_{I0}\exp(\beta SS_I)$ とし、$\partial N_I/\partial SS_I = N_{I0}\beta\exp(\beta SS_I)$ としたものと思われる。他の文献等を見ても、氷晶核の数を見積る式は $N_I = N_1\exp(\beta SS_I) + N_2\exp[\beta_2(T_0 - T)]$ 等の形が用いられ、係数は観測データや実験データに基いて決められている。

[9] 質量のマイナス２乗の依存性と大気密度に何故依るのか良くわからない。質量はマイナス１乗の依存性になるのではないか？理論的には凍結時間は核生成率と成長率に依存すると考えられる (参考として Appendix に少し紹介)

不均質凍結: 接触凍結

過冷却雲粒はエアロゾル粒子と衝突して凍結する。衝突は、ブラウン運動、拡散泳動、熱泳動により起こる。

- ブラウン運動 (Brown motion)
  空気分子との衝突による

- 拡散泳動 (diffusiophoresis) [10]
  水蒸気に濃度勾配がある場合、水蒸気の拡散に伴い、エアロゾル粒子も移動する。例えば、凝結している雲粒の表面は周囲より濃度が低く、エアロゾル粒子は雲粒に集まる。

- 熱泳動 (thermophoresis)
  温度勾配がある場合、高温側の気体分子から低温側より大きな運動量を与えられ、その結果、高温側から低温側にエアロゾル粒子が移動する。例えば、蒸発している雲粒の表面は周囲より温度が低いので、エアロゾル粒子が雲粒に集まる。

温度勾配と濃度勾配は同時に存在し、拡散泳動も熱泳動は逆センスに働くが、一般に熱泳動力の方が卓越する。

接触凍結による氷晶発生速度はブラウン運動、拡散泳動、熱泳動による寄与の和として

$$NUC_{ci} = \left[\frac{dN_c}{dt}\right]_b + \left[\frac{dN_c}{dt}\right]_v + \left[\frac{dN_c}{dt}\right]_t \tag{0.8}$$

と表される。ブラウン運動、拡散泳動、熱泳動による氷晶発生速度はそれぞれ

$$\left[\frac{dN_c}{dt}\right]_b \quad = \quad F_1\Psi_a \tag{0.9}$$

[10]重力のように直接作用する力ではなく、媒質分子と粒子との衝突による間接的な力により粒子が移動することを泳動といい、その力を泳動力 (phoretic force) と呼ぶ。

$$\left[\frac{dN_c}{dt}\right]_v = F_1 F_2 \frac{R_v T_a}{L_v \bar{\rho}} \quad (0.10)$$

$$\left[\frac{dN_c}{dt}\right]_t = F_1 F_2 f_t \quad (0.11)$$

で与えられる (Appendix 参照)。但し、

$$F_1 = 2\pi D_c N_c N_{ar} \quad (0.12)$$

$$F_2 = \frac{\kappa}{p}(T_a - T_c) \quad (0.13)$$

$$f_t = \frac{0.4(1 + 1.45K_n + 0.4K_n \exp(-1/K_n))(\kappa + 2.5K_n\kappa_a)}{(1 + 3K_n)(2\kappa + 5\kappa_a K_n + \kappa_a)} \quad (0.14)$$

D_c: 雲粒の直径、N_c: 雲粒の数密度、N_{ar}: 活性化する接触凍結核の数密度、κ: 空気の熱伝導率、 κ_a: エアロゾル粒子の熱伝導率、 K_n: Knudsen 数、T_a:空気の温度、T_c:雲粒の温度である[11] 。Knudsen 数は以下で表される。

$$K_n = \frac{\lambda_{a0} T p_0}{T_0 p R_a} \quad (0.15)$$

但し、R_a: エアロゾル粒子半径、$\lambda_{a0} = 6.6 \times 10^{-8}$m: 平均自由行程。また、エアロゾル粒子の拡散係数 は

$$\Psi_a = \frac{kT_c}{6\pi R_a \mu}(1 + K_n) \quad (0.16)$$

で与えられる（アインシュタインの関係式[12] ）。また、温度 T_c で活性化する接触凍結核の数密度は

$$N_{ar} = \exp(4.11 - 0.262T_c) \quad (0.17)$$

[11]論文では (0.11) 式は大気密度が入っているが次元が合わないので除いた。誤殖？ (0.10) 式は、セミナーで Pruppacher and Klett (1997) を参考に導出を試みたが異なる結果が得られ、導くことができなかった。

[12]平衡状態での粒子の拡散と外力との釣合いから得られる関係式（詳しくは流体力学の本（e.g., Landau section 59) を参照)：拡散係数と移動度 B との関係は $\Psi_a = BkT$ で与えられる。移動度は外力 F により生じる速度 $v = BF$ から定義され、半径 R_a の球形粒子で平均自由行程が半径より小さい場合 $B = 1/(6\pi\mu R_a)$ となる。平均自由行程が半径と同程度あるいはそれより大きくなると補正項 (1+K_n:カニンガム補正項と呼ばれる) が必要になる

で与える。

(b) ２次氷晶発生メカニズム

(a) の１次氷晶発生メカニズムだけでは説明できない高濃度の氷晶が観測されることがあり、これを説明するために以下の２次氷晶発生メカニズムが提案されている。

- 雲、霰が過冷却雲粒を取込ながら成長する際に氷の微粒子（splinter) を生成する: Hallett-Mossop Rime Splintering メカニズム (Hallett and Mossop 1974)。室内実験から以下の発生のための条件が示されている。
  - 気温が-5℃±３℃の範囲にある
  - 捕捉される雲粒が直径 12 μ m 以下と 25 μ m 以上を含むこと。半径の比が大きいほど、発生率も大きい。
  - 降雪粒子の落下速度が霰程度 (2-4ms^{-1}) のとき２次氷晶発生速度が大きい。
- 雲、霰同士が落下中に衝突して小さな氷の破片（ice fragment) を生成する (Vardiman 1978)。
- 雲頂付近で生成された大粒の過冷却水滴（drizzle size) が凍結するとき、氷晶を発生する。

３つのメカニズムのうち、定量的に調べられているのは Hallett-Mossop Rime Splintering メカニズムのみ。ここではこのメカニズムのみ考慮し、２次氷晶発生速度は以下の簡単な取扱いをする。

$$SP_{xiN} = 3.5 \times 10^8 f_1(T_x) CL_{cx} \tag{0.18}$$

$$SP_{xi} = m_{i0} SP_{xiN} \tag{0.19}$$

但し、CL_{cx} ($x = s$ or g) は雪（あるいは霰）の雲粒との衝突捕捉であり、また f_1 は以下で与える。

$$f_1(T_x) = 0, \quad \text{for} \quad T_x > 270.16 \tag{0.20}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{T_x - 268.16}{2}, \quad \text{for} \quad 268.16 \le T_x \le 270.16 && (0.21)\\
&= \frac{268.16 - T_x}{3}, \quad \text{for} \quad 265.16 \le T_x \le 268.16 && (0.22)\\
&= 0, \quad \text{for} \quad T_x < 270.16 && (0.23)\\
& && (0.24)
\end{aligned}
$$

(2) 拡散成長

凝結成長と蒸発についての取扱い

雲粒: 湿潤飽和調節法を用いており、凝結成長と蒸発を直接解かない。

雨滴: 湿潤飽和調節法により過飽和になることはない。よって常に水飽和以下なので、蒸発のみ考慮（蒸発率は Appendix 4 を参照)。

$$
\begin{aligned}
VD_{rv} &= \frac{1}{\bar{\rho}} \int_0^\infty 2\pi D_r (S-1) G(T,P) f n_{r0} \exp(-\lambda_r D_r) dD_r && (0.25)\\
G(T,P) &= \left[\frac{L_v^2}{\kappa R_W T^2} + \frac{1}{\bar{\rho} q_{vs}(T) D_v} \right]^{-1} && (0.26)\\
f &= 0.78 + 0.31 S_c^{1/3} R_e^{1/2} && (0.27)
\end{aligned}
$$

但し、S_c は Schmidt 数 ($= \nu_0 /\ D$: 動粘性率と拡散係数との比) であり、Re はレイノルズ数 であり

$$
Re = \frac{U D_r}{\nu_0} = \frac{a_{ur} D_r^{\beta_{ur}+1} \left(\frac{\rho_0}{\bar{\rho}}\right)^{1/2}}{\nu_0} \qquad (0.28)
$$

となる。

変形すると以下になる。

$$
\begin{aligned}
VD_{rv} &= \frac{1}{\bar{\rho}} 2\pi (S-1) G(T,P) n_{r0} \int_0^\infty D_r (0.78 + 0.31 S_c^{1/3} R_e^{1/2}) \exp(-\lambda_r D_r) dD_r && (0.29)\\
&= \frac{1}{\bar{\rho}} 2\pi (S-1) G(T,P) n_{r0} \left[\ 0.78 \int_0^\infty D_r \exp(-\lambda_r D_r) dD_r + \right. && (0.30)\\
& \left. 0.31 S_c^{1/3} \nu_0^{-1/2} \alpha_{ur}^{1/2} \left(\frac{\rho_0}{\bar{\rho}}\right)^{1/4} \int_0^\infty D_r^{(3+\beta_{ur})/2} \exp(-\lambda_r D_r) dD_r\ \right] && (0.31)\\
&= \frac{2\pi n_{r0}}{\bar{\rho}} (S-1) G(T,P) VENT_r && (0.32)
\end{aligned}
$$

$$VENT_r = \frac{0.78}{\lambda^2} + 0.31 S_c^{1/3} \nu_0^{-1/2} \alpha_{ur}^{1/2} \left(\frac{\rho_0}{\bar{\rho}}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{5+\beta_{ur}}{2}\right) \lambda^{-\frac{5+\beta_{ur}}{2}} \tag{0.33}$$

雪の昇華凝結（蒸発）速度も同様に求まる。但し、０℃以下の場合、凍結の潜熱放出による温度上昇を考慮して、

$$VD_{vs} = \frac{2\pi n_{r0}}{\bar{\rho}}(S-1) GI(T,P) VENT_s - \frac{L_s L_f}{\kappa R_W T^2} GI(T,P) CL_{cs} \tag{0.34}$$

$$GI(T,P) = \left[\frac{L_s^2}{\kappa R_W T^2} + \frac{1}{\bar{\rho} q_{VSI}(T) D_v}\right]^{-1} \tag{0.35}$$

$$\tag{0.36}$$

と与える。右辺の第２項は雲粒と雪が衝突して凍結が起ると、温度上昇し、その結果さらに蒸発しやすくなる効果を表す。（但し q_{VSI} は氷飽和の水蒸気密度）また、０℃以上の場合で融解がある場合（$ML_{sr} > 0$) は

$$VD_{vs} = \frac{2\pi D_v n_{s0}}{\bar{\rho}}(\rho_{vs}(T_0) - \rho_v) VENT_s \tag{0.37}$$

とする。

Appendix 1: 液体の結晶化率について

結晶化体積

時刻 t' から $t'+dt'$ の間に形成される結晶核の個数 $N(t')$ は

$$N(t')dt = [V_0 - V_{\rm cr}(t')]J(t')dt' \tag{0.38}$$

で表される。但し、J は核生成率、V_0 は液体の初期体積。 $V_{\rm cr}$ は結晶化した部分の体積であり、

$$V_{\rm cr}(t) = \int_0^t [V_0 - V_{\rm cr}(t')]J(t')\frac{4\pi}{3}a^3(t,t')dt' \tag{0.39}$$

と表される。a は粒子半径であり、結晶の成長速度 w を用いて

$$a = \int_0^t w(t')dt \tag{0.40}$$

と表される。(0.39) より、結晶の volume fraction $\theta \equiv V_{\rm cr}/V_0$ を用いると以下が得られる。

$$1-\theta(t) = 1 - \int_0^t [1-\theta(t')]J(t')\frac{4\pi}{3}a^3(t,t')dt' \tag{0.41}$$

温度一定の場合の近似解

$\theta \ll 1$ の場合の近似解を求める。

$$\frac{d}{dt}\ln[1-\theta(t)] = -\frac{1}{[1-\theta(t)]}\frac{d}{dt}\int_0^t [1-\theta(t')]J(t')\frac{4\pi}{3}a^3(t,t')dt' \tag{0.42}$$

より $\theta \ll 1$ の場合、

$$\frac{d}{dt}\ln[1-\theta(t)] \simeq -\frac{d}{dt}\int_0^t J(t')\frac{4\pi}{3}a^3(t,t')dt' \tag{0.43}$$

となり、積分を実行すると、

$$1-\theta(t) = \exp\left[-\frac{d}{dt}\int_0^t J(t')\frac{4\pi}{3}a^3(t,t')dt'\right] \tag{0.44}$$

さらに温度が一定の場合には、J, w が一定なので、$a = wt$ より、

$$\int_0^t J(t')\frac{4\pi}{3}a^3(t,t')dt' = J\frac{4\pi}{3}w^3\int_0^t (t-t')^3dt' = \frac{\pi}{3}Jw^3t^4 \tag{0.45}$$

になり、

$$1-\theta(t)=\exp\left[-\frac{\pi}{3}Jw^3t^4\right] \tag{0.46}$$

となる。この場合、液体中で結晶の体積が $1/e$ になる時間は

$$\tau_c=\left(\frac{3}{\pi J w^3}\right)^{1/4} \tag{0.47}$$

である。成長率は

$$w\propto\exp\left\{-\frac{E_\mathrm{a}}{kT}\right\} \tag{0.48}$$

であり、また核生成率は均質核生成の場合、

$$J\propto\exp\left\{-\frac{E_\mathrm{a}}{kT}-\frac{4(\beta\sigma)^3T}{27q_\mathrm{l}^2k(T_0-T)^2}\right\} \tag{0.49}$$

で与えられる。よってこの場合、

$$\tau_c\propto\exp\left\{\frac{E_\mathrm{a}}{kT}+\frac{(\beta\sigma)^3T}{27q_\mathrm{l}^2k(T_0-T)^2}\right\} \tag{0.50}$$

となる。但し、E_a は分子拡散の活性化エネルギー、σ は界面エネルギー、q_l は潜熱。

Appendix 2:

接触凍結

粒子のブラウン運動は単純な拡散過程と考えられる。球座標系の拡散方程式：

$$\frac{\partial N_{ar}}{\partial t}=\Psi_a\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rN_{ar})}{\partial r^2} \tag{0.51}$$

の定常解を求めると、

$$N_{ar}=N_{ar,0}\left(1-\frac{r_c}{r}\right) \tag{0.52}$$

となる（但し境界条件は $N_{ar}=N_{ar,0}$ at $r=\infty$, $N_{ar}=0$ at $r=r_c$ とした。r_c は半径。)。従って、flux は

$$F=\Psi_a\left(\frac{\partial N_{ar}}{\partial r}\right)_{r=r_c}=\frac{\Psi_a N_{ar}}{r_c} \tag{0.53}$$

より、N_c 個の雲粒に単位時間当り衝突するエアロゾルの個数は

$$\frac{dN_c}{dt} = 4r_c^2 \pi N_c F/4 = 4\pi r_c N_c N_{ar} \Psi_a = 2\pi D_c N_c N_{ar} \Psi_a \tag{0.54}$$

である[13] 。

拡散泳動、熱泳動の導出方法として論文ではreferenceがないが、ここではPruppacher and Klett (1997) を参考にして議論する (see Chapter 17, p. 724, Microphysics of clouds and precipitation） 。方法としては（１）粒子に与える気体分子からの力を計算 (e.g., Brock (1962), see Appendix 3)、（２）平衡を仮定し Stokes drag との釣合いより粒子速度 V を求め,（３）

$$\frac{dN_c}{dt} = 4r_c^2 \pi N_c N_{ar} V \tag{0.55}$$

を計算することにより得られる。熱泳動は温度勾配による熱流速 $2\pi D_c \kappa (T_a - T_c)$ に比例する。また、拡散泳動は $2\pi D_c \Psi_a (\rho_a - \rho_c)$ に比例する。濃度勾配が雲粒の蒸発や凝結により決まると考えると、拡散泳動、熱泳動は共に温度勾配により決まる。

Appendix 3: Brock (1962) による取扱い

流体の熱輸送式：

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v}\ \mathrm{grad} T = \chi \Delta T \tag{0.56}$$

から、温度が r, θ 方向（極座標）に勾配がある場合の定常解を求める。

$$\Delta T = \frac{1}{\chi} \left(\frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \tag{0.57}$$

粒子表面では

$$\Delta T_{\mathrm{s}} = 0 \tag{0.58}$$

[13]論文では単位時間当り衝突するエアロゾルの個数はが氷晶発生率となっている。衝突数が小さく、1 つの雲粒に衝突する数は 1 より小さいときのみ成り立つ。

一方、連続の式、運動方程式は

$$\nabla \boldsymbol{v} = 0 \tag{0.59}$$

$$(\boldsymbol{v}\ \mathrm{grad})\boldsymbol{v} = -\nabla p + \mu \Delta \boldsymbol{v} \tag{0.60}$$

(0.57)-(0.60) を適当な境界条件 (slip-flow boundary conditions) のもとで解く。粒子に働く力は運動量流速密度テンソル π_{ik} をその表面で積分して求める。

$$F = \int \pi_{ik} n_k ds = \int (p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}) n_k ds \tag{0.61}$$

(σ'_{ik}: 粘性ストレステンソル)

Appendix 4: 蒸発率 (e.g., Misumi and Maruyama, 2004)

雲粒の質量の変化は

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi D_r^2 D_v \left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{r=D_r} \tag{0.62}$$

球座標系、定常分布

$$\rho(r) = \rho(\infty) - \frac{D_r}{r}[\rho(\infty) - \rho(D_d)] \tag{0.63}$$

より、

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi D_r D_v [\rho(\infty) - \rho(D_d)] \tag{0.64}$$

となる。以下、$\rho(D_d)$ について求める。雲粒の表面から発生する潜熱が熱拡散により運ばれ、定常になるとすると温度変化は同様に、

$$L_v \frac{dm}{dt} = 4\pi D_r \kappa [T(D_d) - T(\infty)] \tag{0.65}$$

と表せる。飽和蒸気圧を p_e とすると、定義から

$$\frac{1}{p_e}\frac{dp_e}{dT} = \frac{L}{R_v T^2} \tag{0.66}$$

が成立ち、状態方程式 $P_e = \rho R_v T$ を用いると、

$$\frac{d\rho_e}{\rho_e} = \frac{L_v}{R_v}\frac{dT}{T^2} - \frac{dT}{T} \simeq \frac{L_v}{R_v}\frac{dT}{T^2} \tag{0.67}$$

となる。これを無限から D_r まで積分すると、

$$\ln[\frac{\rho(D_r)}{\rho(\infty)}] = -\frac{L_v}{R_v}[\frac{1}{T(D_r)} - \frac{1}{T(\infty)}] \simeq \frac{L_v}{R_v T(\infty)^2}[T(D_r) - T(\infty)] \tag{0.68}$$

これより、

$$\frac{\rho(D_r)}{\rho(\infty)} = \exp\left\{\frac{L_v}{R_v T(\infty)^2}[T(D_r) - T(\infty)]\right\} \simeq 1 + \frac{L_v}{R_v T(\infty)^2}[T(D_r) - T(\infty)] \tag{0.69}$$

となる（雲粒表面は飽和していると仮定)。これより、

$$\frac{dm}{dt} = \frac{4\pi D_r[\rho(\infty)/\rho_e(\infty) - 1]}{[L_v^2/(\kappa R_v T^2) + 1/(D_v \rho_e(\infty))]} \tag{0.70}$$

が導かれる。