

有限差分法による 1次元線形移流方程式の数値解法

北海道大学理学部地球科学科
地球流体力学研究室4年

学籍番号 22070013

川畑 拓也
KAWABATA Takuya

2011/02/25

要旨

本論文では, 有限差分法を用いた大気モデルにおいてよく用いられる差分スキームと, その性質を Mesinger and Arakawa (1976) に沿ってまとめ, 実際に有限差分法を用いて 1 次元線形移流方程式の数値計算を行った. 有限差分法を用いて数値計算を行う際, 計算対象となる方程式を差分化する方法は複数存在する. しかし, すべての差分化の方法 (差分スキーム) が適切な数値解を導くとは限らない. 本論文では様々なスキームの精度と, 初期値問題に用いられる差分スキーム (時間差分スキーム) の安定性を調べ, 対象となる方程式の時間発展を数値的に解く際に適切な時間差分スキームについてまとめた. 最後に, 1 次元線形移流方程式を空間方向には 2 次精度中心差分, 時間方向には前進差分 (オイラスキーム) を用いて差分化し, その数値解の振る舞いについて調べた.

目次

第1章 序論	6
1.1 背景と目的	6
第2章 有限差分法の基礎	7
2.1 運動方程式の数値解法概論	7
2.2 格子点法の基礎	8
2.3 差分方程式の性質	11
2.3.1 適合性 (consistency)	12
2.3.2 収束性	14
2.3.3 安定性 (stability)	15
第3章 時間差分スキーム	21
3.1 時間差分スキームの定義	21
3.1.1 2段階 (2-level) スキーム	22
3.1.2 3段階 (3-level) スキーム	25
3.2 振動方程式への応用	28
3.2.1 反復しない2段階スキームの安定性	30
3.2.2 反復する2段階スキームの安定性	32
3.2.3 2段階スキームの位相	34
3.2.4 3段階スキーム	38

3.3	摩擦方程式への応用	48
3.4	複数のスキームを組み合わせた場合	52
第4章	1次元移流方程式の数値解法	53
4.1	2次精度中心差分を用いた差分化	53
4.1.1	リーブフログスキーム	54
4.1.2	松野スキーム	57
4.1.3	エネルギー法を用いた安定性の考察	57
4.1.4	Lax-Wendroff スキーム	59
4.2	数値分散	63
4.3	中心差分でない空間差分法を用いた場合	71
4.4	4次精度中心差分を用いた場合	75
第5章	1次元移流方程式の数値解の振る舞い	80
5.1	スキームの構築と初期条件	80
5.2	計算実験	81
第6章	まとめ	87
	付録	90
	謝辞	93
	参考文献	94

図目次

2.1.1 格子点のとり方を表す. 離散化された関数 u_n は x_n の点でしか値を持たない.	7
2.2.2 図 A は計算機で計算できる最も波長の短い波 (波長 $\lambda = 2\Delta x$) の模式図である. これよりも波長の短い波は図 B のようになり, 連続関数 $u(x)$ を離散化した関数 $u_j(j\Delta x)$ では表現できない ($\lambda = 2\Delta x$ より小さい波長の波を区別できない).	10
2.3.3 1次元線形移流方程式の特性曲線.	13
2.3.4 特性曲線と依存領域の関係. この例では, 数値解は真の解に収束しない.	14
2.3.5 (2.19) に関する波長と増幅係数の関係. 縦軸は $ \lambda ^2$, 横軸は μ である. 破線は $L = 2\Delta x$, 実線は $L = 4\Delta x$, 点線は $L = 8\Delta x$ の場合である.	20
3.2.1 5つの2段階スキームの増幅係数の振る舞い. 横軸は $p = \omega\Delta t$, 縦軸は $ \lambda $ をとっている. 実線はオイラスキーム, 破線は後退スキーム, 細点線は台形スキーム, 1点鎖線は松野スキーム, 点線はホインスキームをそれぞれ表している.	35
3.2.2 リーフログスキームにおける物理モードと計算モードの位相の振る舞いを示す. ただし, $x = p/\sqrt{1-p^2}$ である.	41
3.2.3 リーフログスキームの物理モード (A) と計算モード (B) の位相の変化を, 縦軸に U_{im} , 横軸に U_{re} をとって示した図. 図は $\theta_1 = \frac{\pi}{8}$ の場合である.	44
3.2.4 $ p > 1$ の場合のリーフログスキームの不安定モード. $ \lambda = 1.1$ としている. 横軸に n , 縦軸に U の実部をとっている. 図から振動の周期は $4\Delta t$ であることがわかる.	46
4.1.1 Lax-Wendroff スキームを構成するために用いられる格子.	59

4.1.2 (4.33) と (4.34) で記述される, Lax-Wendroff スキームの増幅係数の大きさを示す. 縦軸に $ \lambda $, 横軸に μ をとっている. ただし, $\mu = c\Delta t/\Delta x$ である. 破線は波長が $4\Delta x$ のときを, 実線は波長が $2\Delta x$ のときをそれぞれ表す.	62
4.2.3 波長 $2\Delta x$ の解の模式図. すべての点で $u_{j+1} = u_{j-1}$ となることがわかる.	65
4.2.4 移流速度 $c = 1.0$ のときの連続形での位相速度と群速度, 並びに, 差分形での位相速度と群速度. 縦軸は位相速度と群速度の大きさ, 横軸は $k\Delta x$ である. 点線は連続形での位相速度と群速度 $c = c_g$, 実線は差分形での位相速度 c_{ph}^* , 破線は差分形での群速度 c_g^* をそれぞれ表す.	66
4.2.5 関数 $u_j, \pm Y(x)$ を 2 次精度中心差分を用いて計算したときの波形.	67
4.2.6 $j = 0, 1, 2$ のときのベッセル関数 $J_0(\tau), J_1(\tau), J_2(\tau)$	68
4.2.7 (4.49) の解析解. $\tau = 0, 5, 10$ のときをそれぞれ示す.	70
4.3.8 空間差分の違いによる影響領域の模式図. A は上流差分を用いた場合, B は下流差分を用いた場合, C は中心差分を用いた場合である.	72
4.3.9 特性曲線の通過する点 $(j\Delta x, (n+1)\Delta t)$ と u^* の関係.	73
4.3.10 格子点 $((j-1)\Delta x, n\Delta t)$ と $(j\Delta x, n\Delta t)$ の比の関係.	73
4.3.11 $r = 4$ のときのポアソンの周波数関数 (4.56).	74
4.3.12 空間差分スキームの違いによる解の振る舞い. 太実線は解析解, 点線は中心差分を用いた場合の数値解, 細実線は上流差分を用いた場合の数値解をそれぞれ表す. 3 つの図は上から無次元時間 $\tau = 5, 10, 15$ のときをそれぞれ示している.	76
4.4.13 1 次元線形移流方程式に 4 次精度中心差分を用いた場合と, 2 次精度中心差分を用いた場合の位相速度を示す. 点線は連続形での位相速度 $c = c_{ph}$, 破線は 2 次精度差分の場合の位相速度 c_{ph}^* , 実線は 4 次精度差分の場合の位相速度 c_{ph}^{**} である. 座標のとり方は図 4.2.4 と同様である.	78
5.2.1 初期状態 $t = 0$ (0 step)	82
5.2.2 $t = 0.1$ (10 step) のときの (5.2) の解	82

5.2.3 $t = 0.5$ (50 step) のときの (5.2) の解	82
5.2.4 $t = 1.0$ (100 step) のときの (5.2) の解	82
5.2.5 初期状態	83
5.2.6 $t = 0.1$ (10 step) のときの (5.2) の解	83
5.2.7 $t = 0.5$ (50 step) のときの (5.2) の解	83
5.2.8 $t = 1.0$ (100 step) のときの (5.2) の解	83
5.2.9 計算 2 において, $t = 0.5$ のときの (5.2) の解	84
5.2.10 計算 2 において $t = 1.0$ のときの (5.2) の解	84
5.2.11 計算 3 において, $t = 0.5$ のときの (5.2) の解	85
5.2.12 計算 3 において $t = 1.0$ のときの (5.2) の解	85
5.2.13 計算 4 初期状態	86
5.2.14 計算 4 において $t = 0.1$ のときの (5.2) の解	86
5.2.15 計算 4 において, $t = 0.5$ のときの (5.2) の解	86
5.2.16 計算 4 において $t = 1.0$ のときの (5.2) の解	86

第1章 序論

1.1 背景と目的

金星の雲構造は化学的要素と力学的要素が複雑に作用して形成されている。我々の目的は雲解像モデルに金星の雲物理過程を組み込み、数値シミュレーションによって金星の雲対流を解明することである。

しかしながら、実際に雲解像モデルを用いる前に、モデルで用いられている要素技術を把握しておく必要がある。そこで、雲解像モデルで用いられている有限差分法を理解するため、数値計算に関する古典的な論文、Mesinger and Arakawa (1976) に沿って、様々な有限差分スキームについて理解し、実際に数値解の振る舞いを確かめようというのが本論文の目的である。

本論文では1次元線形移流方程式を取り上げる。なぜならば、移流方程式はとある物理量の輸送を記述するものであり、流体の基礎方程式を構成する重要な部分を成しているからである。

本論文の構成は、Mesinger and Arakawa (1976) に沿って、まず第2章で数値計算の基本的な原理を解説する。第3章では様々な時間差分スキームを紹介し、実際に時間差分スキームを常微分方程式に適用して安定性と、解析解との位相のずれを考察する。第4章では第3章までの内容を踏まえ、1次元線形移流方程式を差分化し、数値的に解く場合の注意点や、精度の向上などを考察する。第5章にて、時間方向にオイラースキームを、空間方向に中央差分を用いて、1次元線形移流方程式を差分化し、実際に数値計算をして解の振る舞いを確かめる。

第2章 有限差分法の基礎

2.1 運動方程式の数値解法概論

運動方程式の代表的な数値解法には、格子点法、ラグランジュ法、スペクトル法の3種類がある。

格子点法 (Grid point method)

対象領域をあらかじめ有限個の点に分割し、格子点上に従属変数を定義する。このとき、分割した点のことを格子点、またはメッシュ (mesh) と呼ぶ。格子点を空間に固定し、オイラー的視点に立って式を解く。この時、独立変数は座標と時間となる。

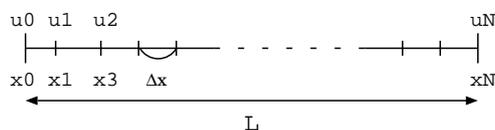


図 2.1.1: 格子点のとり方を表す。離散化された関数 u_n は x_n の点でしか値を持たない。

ラグランジュ法

個々の流体粒子に着目し、着目した流体粒子の位置と運動量を計算する方法である。独立変数は着目した流体粒子に貼り付けたラベルと時間である。流体が動く度にいちいち格子を作り直さなければならないので、手間と時間がかかる。ラグランジュ法の欠点を改善した方法として、セミラグランジュ法がある。ラグランジュ法が不規則なラベルをそのまま用いて計算を進めるのに対して、セミラグランジュ法は不規則な点からある適当な格子点上の値を求め直しながら計算を進める。

スペクトル法

従属変数を空間方向に直交関数を用いた級数で展開し、展開係数の時間発展を解く方法である。直交関数系で展開された元の偏微分方程式は、展開係数の時間に関する

る常微分方程式になる. この常微分方程式の微分を差分で置き換え, 展開係数の数だけの台数方程式に直して数値解を求める.

切断波数の個数分の常微分方程式の集まりになる. 例えば, $0 \leq x \leq L$ で周期境界条件の場合を考える. $u(x, t)$ を展開係数 $\hat{u}_n(t)$ とフーリエ級数で展開する.

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^N \hat{u}_n(t) e^{-i \frac{2\pi n x}{L}}.$$

N を切断波数とする展開係数 $\hat{u}_n(t)$ ($n = 0, \dots, N$) の時間発展を解き, $u(x, t)$ を求める.

2.2 格子点法の基礎

変数の定義

簡単のため独立変数を x のみとする関数,

$$u = u(x)$$

を考える. ただし, $u(x)$ は領域 R ($0 \leq x \leq L$) で定義されるとする. まず, 領域 R を一定の間隔 Δx ¹⁾ で分割し, 格子点を定義する. 今領域 R を J 個に分割すると, $u(x)$ は $x = j\Delta x$ ($j = 0, 1, \dots, J$) 上の点で与えられて,

$$u_j = u(j\Delta x) \quad (j = 0, 1, \dots, J)$$

となる. この関数 $u(x)$ を x 軸上のとびとびの点で表し微分を差分で近似することを差分化という.

有限差分に伴う情報落ち

差分近似を正確に行っても, 離散化された $u(j\Delta x)$ は元の連続量である $u(x)$ に比べると表現可能な情報が減ってしまうことは直感的にも理解できる. この情報落ちを有限の波数で切断したフーリエ級数を用いて示す. $0 \leq x \leq L$ のとき $u(x)$ のフーリエ級数展開は,

¹⁾ Δx を格子間隔 (grid interval または grid length) と呼ぶ.

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\frac{J}{2}} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{L} x + b_n \sin \frac{2\pi n}{L} x \right).$$

切断波数が $J/2$ になるのは元の格子点上の変数 u_j の数が $J+1$ 個のためである. a_n で $J/2$ 個, b_n で $J/2$ 個, a_0 で 1 個, 合計で $J+1$ 個の情報となる. すなわち, 切断波数 N を $J/2$ より大きくしても意味をなさないことに注意されたい. 最も波長の短い成分は $n = J/2$ の成分として与えられる. このとき, 波長 λ は,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{L}{n} \\ &= \frac{J\Delta x}{\frac{J}{2}} \\ &= 2\Delta x. \end{aligned}$$

ゆえに, 差分近似では $2\Delta x$ よりも短い波長は表現できないことがわかる (図 (2.2.2) 参照).

微分の差分表現とその精度

$x = j\Delta x$ における u の微分 $\frac{du}{dx} \Big|_{j\Delta x}$ を考える. これを差分で表すときその方法は前方差分, 中央差分, 後方差分の 3 つの方法がある.

前進差分

$$\frac{du}{dx} \Big|_{j\Delta x} \approx \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x}$$

中央差分

$$\frac{du}{dx} \Big|_{j\Delta x} \approx \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x}$$

後方差分

$$\frac{du}{dx} \Big|_{j\Delta x} \approx \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x}$$

上記の差分近似はどれも $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\frac{du}{dx} \Big|_{j\Delta x}$ に一致する.

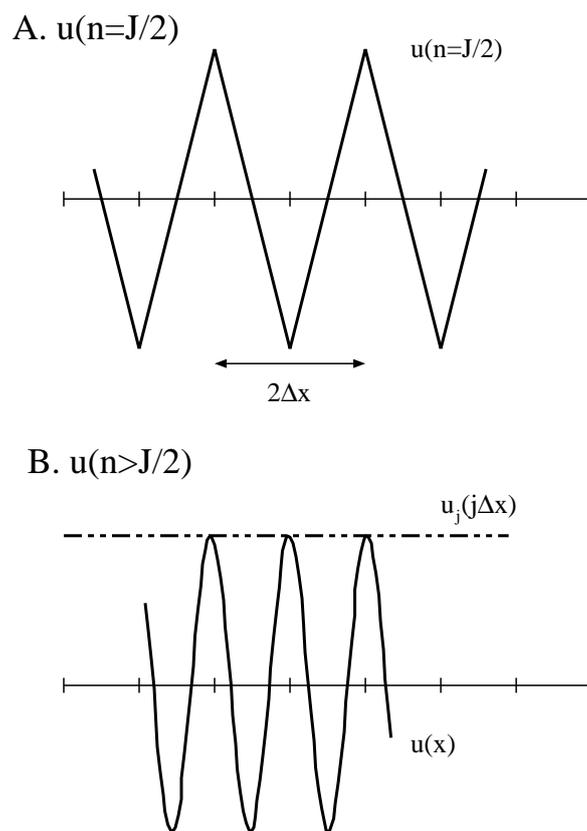


図 2.2.2: 図 A は計算機で計算できる最も波長の短い波 (波長 $\lambda = 2\Delta x$) の模式図である. これよりも波長の短い波は図 B のようになり, 連続関数 $u(x)$ を離散化した関数 $u_j(j\Delta x)$ では表現できない ($\lambda = 2\Delta x$ より小さい波長の波を区別できない).

差分の精度

差分の精度はテイラー展開を用いて調べることができる。例えば前進差分の場合を考える。 u_{j+1} を $j+1$ のまわりでテイラー展開すると、

$$\begin{aligned} u_{j+1} &= u((j+1)\Delta x) \\ &= u(j\Delta x) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j (\Delta x)^2 + \dots \end{aligned}$$

$u_j = u(j\Delta x)$ であることに注意し、右辺第1項を移行して両辺を Δx で割ると、

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j \Delta x + \dots$$

右辺第1項は真の値である。したがって、真の値と差分値 $\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x}$ との誤差を ε とすると、

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j \Delta x + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j (\Delta x)^2 \dots \end{aligned}$$

この ε のことを打ち切り誤差 (truncation error) という。

打ち切り誤差を図る尺度として、近似精度の次数 (order of accuracy) がある。近似精度の次数は ε に含まれる最低次の Δx の次数を指す。上記の例の場合、 ε に1次の Δx が含まれているので、その精度は1次であり、

$$\varepsilon = O(\Delta x)$$

と表す。

2.3 差分方程式の性質

本論文で着目する方程式は1次元線形移流方程式である。 $u = u(x, t)$ のとき、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c = \text{const.} \quad (2.1)$$

偏微分方程式 (2.1) の解析解は、初期条件 $u(x, 0) = F(x)$ のもと、標準座標の導入により次のようにして求めることができる。まず $\xi = x - ct$ とおき、独立変数 x, t を ξ, t に変換する。

$$u(x, t) = U(\xi, t).$$

u を t で微分して,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} = -c \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (2.2)$$

u を x で微分して,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi}. \quad (2.3)$$

(2.2) と (2.3) を (2.1) に代入して,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} &= -c \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial t} + c \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ &= \frac{\partial U}{\partial t} \\ &= 0. \end{aligned}$$

ゆえに, U は ξ のみの関数でなければならず, t の関数ではない. したがって, f を任意の関数として,

$$U(\xi, t) = f(\xi).$$

よって,

$$u = f(x - ct).$$

初期条件をあてはめると,

$$u(x, t) = F(x - ct). \quad (2.4)$$

(2.4) は (2.1) の解析解である.

特性曲線

(2.4) から, (2.1) の解析解は直線 $x - ct = x_0$ ($x_0 = \text{const}$) 上では常に $f(x_0)$ という一定値をとる. このようにある曲線上で着目する関数の値が一定値をとるような曲線のことを, 特性曲線 (characteristics curve) という. 方程式の解はこの特性曲線に沿って伝播する.

2.3.1 適合性 (consistency)

$\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ で差分式が元の式に一致するとき, その差分式は適合性 (consistency) をもつという.

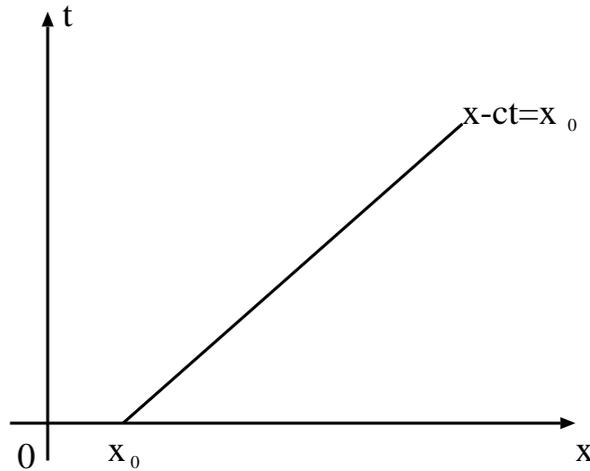


図 2.3.3: 1次元線形移流方程式の特性曲線.

$x = j\Delta x$ において, (2.1) を空間方向に後退差分, 時間方向に前進差分を用いて差分化すると,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0. \quad (2.5)$$

ここで, u_j^n は点 $(j\Delta x, n\Delta t)$ における u の値である. 数値解の精度 (誤差) は $u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t)$ で与えられる. 数値解の精度を予測することはできないが, 解析解 $u(j\Delta x, n\Delta t)$ を差分式に代入することで, 差分式の精度を評価することはできる. 差分式の打ち切り誤差を ε とすれば,

$$\frac{u(j\Delta x, (n+1)\Delta t) - u(j\Delta x, n\Delta t)}{\Delta t} + \frac{u(j\Delta x, n\Delta t) - u((j-1)\Delta x, n\Delta t)}{\Delta x} = \varepsilon. \quad (2.6)$$

先ほどと同様にして, $u(j\Delta x, (n+1)\Delta t)$ と $u((j-1)\Delta x, n\Delta t)$ をそれぞれ $t = n\Delta t$, $x = j\Delta x$ のまわりでテイラー展開し, 整理すると,

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} (\Delta t)^2 + \dots \quad (2.7)$$

$$- c \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (\Delta x)^2 + \dots \right). \quad (2.8)$$

よって,

$$\varepsilon = O(\Delta x, \Delta t)$$

となり²⁾, (2.5) は空間, 時間方向ともに 1次精度であることがわかる.

²⁾一般に, 時間差分と空間差分の精度は一致しないため,

$$\varepsilon = O(\Delta x) + O(\Delta t)$$

と表記することもある.

2.3.2 収束性

収束性 (convergence) とは $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ のときに, 数値解が真の解に一致することである. また, あらゆる初期条件に対して, 収束性のある数値解を与えるスキームもまた収束性があると言う. 注意しなければならないことは, 適合性があるからといって, 必ずしも収束性があるとは限らないことである.

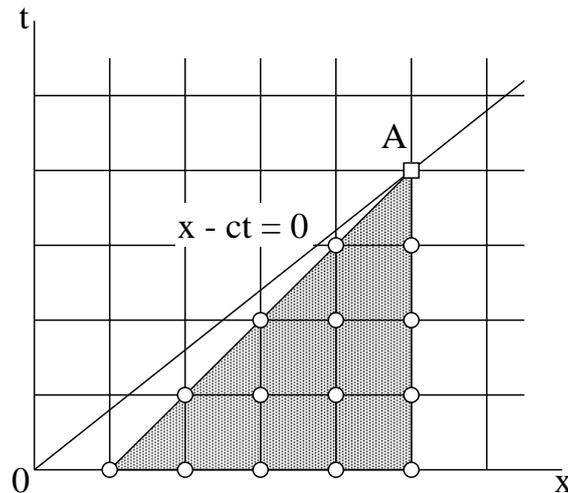


図 2.3.4: 特性曲線と依存領域の関係. この例では, 数値解は真の解に収束しない.

(2.1) を例として考える. $u(j\Delta x, n\Delta t)$ の点を A とし, A を通る直線 $x - ct = 0$ を図示すると上の図のようになる. 連続系の式において, 点 A の解は, 原点での u の解と同じである. 差分系の式においては, 点 A の解は点線より下側の格子点上の値で表現される. 点線より下の斜線をつけた領域を依存領域 (domain of dependence) と呼ぶ. 差分解が真の解に収束するための必要条件は, 依存領域が真の解の特性曲線を含むことである. すなわち,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{\Delta x} &\leq \frac{1}{c}, \\ c\Delta t &\leq \Delta x. \end{aligned} \quad (2.9)$$

図からもわかるように, Δt と Δx の比の値が変わらない限り, 格子間隔を小さくしても依存領域は変化しない. (2.9) を CFL 条件 (Courant-Friedrichs-Lewy condition) という.

2.3.3 安定性 (stability)

$n \rightarrow \infty$ で数値解 $u(j\Delta x, n\Delta t)$ が有界のとき, その差分式は安定であるという³⁾. 差分式の安定性の判定法には, 直接法, エネルギー法, フォンノイマン法の3通りの方法がある.

直接法 (direct method)

真の解が有界であることをすでに知っているとする. このとき数値解の絶対値の最大値が有界であるかどうかを調べる方法が直接法である.

移流方程式の差分式 (2.5) を u_j^{n+1} について解くと,

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} &= 0, \\ u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n), \\ u_j^{n+1} &= \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) u_j^n + \frac{c\Delta t}{\Delta x} u_{j-1}^n. \end{aligned}$$

ここで, $\frac{c\Delta t}{\Delta x} = \mu$ とおくと,

$$u_j^{n+1} = (1 - \mu)u_j^n + \mu u_{j-1}^n. \quad (2.10)$$

収束性の条件から,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{\Delta x} &\leq \frac{1}{c}, \\ c \frac{\Delta t}{\Delta x} &\leq 1, \\ 1 - \mu &\geq 0. \end{aligned}$$

よって, 安定性条件は,

$$|u_j^{n+1}| \leq (1 - \mu)|u_j^n| + \mu|u_{j-1}^n|. \quad (2.11)$$

$t = (n+1)\Delta t$ での $|u_j^{n+1}|$ の最大値を $\text{Max}_{(j)}|u_j^{n+1}|$ とし, $t = n\Delta t$ での $|u_j^n|$ の最大値を $\text{Max}_{(j)}|u_j^n|$ とする. このとき安定性条件 (2.11) は,

$$\begin{aligned} \text{Max}_{(j)}|u_j^{n+1}| &\leq \text{Max}_{(j)}|(1 - \mu)u_j^n + \mu u_{j-1}^n| \\ &\leq (1 - \mu)\text{Max}_{(j)}|u_j^n| + \mu\text{Max}_{(j)}|u_{j-1}^n| \\ &= \text{Max}_{(j)}|u_j^n| \end{aligned}$$

³⁾ 正確には $\Delta x, \Delta t$ を固定し, $n \rightarrow \infty$ としたとき, 真の解と数値解との誤差 $u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t)$ が有界であるときに安定であるという.

となる. 3 行目の変形では同じ時刻の最大値なので,

$$\text{Max}_{(j)}|u_{j-1}^n| = \text{Max}_{(j)}|u_j^n|$$

となることを用いた.

エネルギー法 (energy method)

エネルギー法は数値解 u_j^n の 2 乗の和 $\sum_j (u_j^n)^2$ が有界であるかどうかを調べる方法である. 物理学に応用した場合 u^2 はエネルギーに比例する量なので, エネルギー法と呼ばれる.

(2.10) から, $\sum_j (u_j^{n+1})^2$ を計算する. まず (2.10) の両辺を 2 乗して,

$$(u_j^{n+1})^2 = (1 - \mu)^2 (u_j^n)^2 + \mu^2 (u_{j-1}^n)^2 + 2(1 - \mu)\mu u_j^n u_{j-1}^n.$$

次に j について和をとって,

$$\sum_j (u_j^{n+1})^2 = \sum_j [(1 - \mu)^2 (u_j^n)^2 + \mu^2 (u_{j-1}^n)^2 + 2(1 - \mu)\mu u_j^n u_{j-1}^n].$$

ここで周期境界条件 $u_{-1}^n = u_j^n$ を仮定すると,

$$\begin{aligned} \sum_j (u_{j-1}^n)^2 &= (u_{-1}^n)^2 + (u_0^n)^2 + (u_1^n)^2 + \cdots + (u_{j-1}^n)^2 \\ &= (u_j^n)^2 + (u_0^n)^2 + (u_1^n)^2 + \cdots + (u_{j-1}^n)^2 \\ &= \sum_j (u_j^n)^2. \end{aligned}$$

また, シュヴァルツの方程式,

$$\sum ab \leq \sqrt{\sum a^2} \sqrt{\sum b^2},$$

をもちいると,

$$\begin{aligned} \sum u_j^n u_{j-1}^n &\leq \sqrt{\sum (u_j^n)^2} \sqrt{\sum (u_{j-1}^n)^2} \\ &= \sum (u_j^n)^2. \end{aligned}$$

収束性の条件から, $1 - \mu \geq 0$ でなければならないので,

$$\begin{aligned} \sum_j (u_j^{n+1})^2 &= \sum_j [(1 - \mu)^2 (u_j^n)^2 + \mu^2 (u_{j-1}^n)^2 + 2(1 - \mu)\mu u_j^n u_{j-1}^n] \\ &\leq \sum_j [(1 - \mu)^2 (u_j^n)^2 + \mu^2 (u_j^n)^2 + 2(1 - \mu)\mu (u_j^n)^2] \\ &= [(1 - \mu)^2 + \mu^2 + 2(1 - \mu)\mu] \sum_j (u_j^n)^2 \\ &= \sum_j (u_j^n)^2, \end{aligned}$$

である.

フォンノイマン法 (Von Neumann's method)

数値解をフーリエ級数展開し, 展開係数が有界であるかどうかを調べる方法をフォンノイマン法という. 直接法やエネルギー法とは異なり, 実際に数値計算をしなくても安定性を議論できるので, 最もよく用いられる方法である.

1次元線形移流方程式は連続形の場合 (2.1) と表される. (2.1) の波数 k 成分の解は,

$$u(x, t) = \text{Re}[U(t)e^{ikx}]$$

である. 展開係数 $U(t)$ は,

$$\frac{dU}{dt} + ikcU = 0,$$

を満たす. 上の常微分方程式の解析解は,

$$U(t) = U(0)e^{ikct}.$$

よって, これを元の展開式に代入すると,

$$u(x, t) = \text{Re}[U(0)e^{ik(x-ct)}], \quad (2.12)$$

となる. 一方, 離散化した場合, 1次元線形移流方程式は (2.5) のように表される. 各格子点上の予報変数 u_j^n の波数 k 成分の解は,

$$u_j^n = \text{Re}[U^n e^{ikj\Delta x}].$$

上式を差分式 (2.5) に代入して,

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} e^{ikj\Delta x} + c \frac{U^n}{\Delta x} (e^{ikj\Delta x} - e^{ik(j-1)\Delta x}) &= 0 \\ \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + c \frac{U^n}{\Delta x} (1 - e^{ik\Delta x}) &= 0. \end{aligned}$$

U^{n+1} について解くと,

$$\begin{aligned} U^{n+1} &= \left(1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) U^n + c \frac{\Delta t}{\Delta x} U^n e^{-ik\Delta x} \\ &= (1 - \mu)U^n + \mu U^n e^{-ik\Delta x}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

ここで, U^n の $n \rightarrow \infty$ の挙動を知るために, 増幅係数 (amplification factor) λ を次のように定義し, 導入する.

$$\lambda \equiv \frac{U^{n+1}}{U^n}. \quad (2.14)$$

(2.14) より,

$$|U^{n+1}| = |\lambda| |U^n|.$$

同様にして $|U^n|$ を展開していくと,

$$\begin{aligned} |U^n| &= |\lambda| |U^{n-1}| \\ &= |\lambda| |\lambda| \cdots |U^0| \\ &= |\lambda|^n |U^0| \end{aligned}$$

となる. 安定性の条件は, B をとある有限の値としたとき, すべての k に対して,

$$|U^n| = |\lambda|^n |U^0| < B,$$

となることである. よって,

$$|\lambda|^n < \frac{B}{|U^0|}.$$

両辺対数を取り, その右辺を B' と定義すると,

$$n \ln|\lambda| < \ln \frac{B}{|U^0|} \equiv B'.$$

時刻は $t = n\Delta t$ と表されるので,

$$\ln|\lambda| < \frac{B'}{t} \Delta t, \quad (2.15)$$

と変形できる. ここで, 有限時間で数値解が有界となる条件を考える. このとき (2.15) は,

$$\ln|\lambda| \leq O(\Delta t).$$

また, 増幅係数の大きさは高々1程度だと考え, λ を次のように再定義する.

$$\lambda \equiv 1 + \delta.$$

δ が微小量るとき $\ln(1 + \delta)$ を $\delta = 0$ のまわりで展開すると,

$$\begin{aligned}\ln(1 + \delta) &= \ln(1) + \delta - \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{3}\delta^3 + \dots \\ &\approx \delta.\end{aligned}$$

よって, 安定性の条件 (2.15) は,

$$\delta \leq O(\Delta t),$$

または,

$$|\lambda| \leq 1 + O(\Delta t) \quad (2.16)$$

となる. (2.16) の条件は, 数値解がゆっくりと指数的に増幅することを許容する. しかし, 物理的にはそのような解は許されない. したがって, (2.16) の代わりに,

$$|\lambda| \leq 1, \quad (2.17)$$

を安定性の条件とする. これをフォンノイマンの安定性条件という.

安定性条件が分かったので, 実際に (2.13) のように離散化した場合の増幅係数 λ を求める. (2.13) において, $U^{n+1} = \lambda U^n$ と置き換えると,

$$\begin{aligned}\lambda &= 1 - \mu + \mu e^{-ik\Delta x} \\ &= 1 + \mu(e^{-ik\Delta x} - 1).\end{aligned} \quad (2.18)$$

これより,

$$\begin{aligned}|\lambda|^2 &= \lambda \cdot \lambda^* \\ &= \{1 + \mu(e^{-ik\Delta x} - 1)\} \{1 + \mu(e^{ik\Delta x} - 1)\} \\ &= 1 + \mu(e^{-ik\Delta x} - 1) + \mu(e^{-ik\Delta x} - 1) + \mu^2(e^{ik\Delta x} - 1)(e^{-ik\Delta x} - 1) \\ &= 1 + 2\mu(\cos k\Delta x - 1) + \mu^2(2 - 2\cos k\Delta x) \\ &= 1 - 2\mu(1 - \cos k\Delta x)(1 - \mu).\end{aligned} \quad (2.19)$$

ゆえに, $|\lambda|^2 \leq 1$ であるためには, $1 - \mu \geq 0$ でなければならない.

(2.19) で記述される $|\lambda|^2$ の性質を考察する. $k\Delta x$ を固定して, $0 \leq \mu \leq 1$ で $|\lambda|^2$ がどう変化するかを考える. $|\lambda|^2$ を μ の関数としてみると, $|\lambda|^2$ は μ の 2 次関数であり, その極値は,

$$\frac{d|\lambda|^2}{d\mu} = 0,$$

となる μ であたえられる.

$$\frac{d|\lambda|^2}{d\mu} = -2(1 - 2\mu)(1 - \cos k\Delta x),$$

であるから, $\mu = 1/2$ で極小値をとり, 曲線の傾きは $k\Delta x$ が大きいほど, すなわち波長が短くなるほど大きくなる. 最小波長は $2\Delta x$ であり, このとき $|\lambda|^2 = 0$ となる.

図からもわかるとおり, $\mu < 1/2$ では波長が小さいほど増幅係数は小さく, μ を固定すると短波長成分ほど増幅係数は小さい. 例えば $\mu = 1/2$ にすると $L = 2\Delta x$ の成分は 1 ステップの計算でゼロになる.

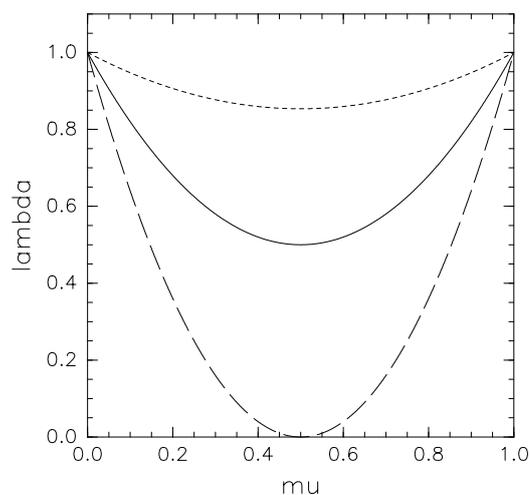


図 2.3.5: (2.19) に関する波長と増幅係数の関係. 縦軸は $|\lambda|^2$, 横軸は μ である. 破線は $L = 2\Delta x$, 実線は $L = 4\Delta x$, 点線は $L = 8\Delta x$ の場合である.

第3章 時間差分スキーム

本論文の目的は偏微分方程式を解くことであるが、この章では独立変数、従属変数がともに1つの常微分方程式について考える。なぜなら1次元線形移流方程式も連立常微分方程式を解く問題に帰着されるからである。

7つの時間差分スキームを具体的な常微分方程式にあてはめて、スキームの安定性と位相の振る舞いについて考える。この章で取り上げる常微分方程式は、振動方程式と摩擦方程式である。

$$\frac{dU}{dt} + i\omega U = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{dU}{dt} + \alpha U = 0. \quad (3.2)$$

3.1 時間差分スキームの定義

以下のような常微分方程式を考える。

$$\frac{dU}{dt} = f(U, t). \quad (3.3)$$

微分方程式 (3.3) の解を $U(t)$ とし、 $U(n\Delta t)$ における近似的な解を U^n と表記する。時間差分スキームを適用した差分式が、

$$\begin{aligned} U^{n+1} = & \sum_{k=1}^N a_{k-1} U^{n-k+1} \\ & + \Delta t f(U^{n+1}, U^n, U^{n-1}, \dots, U^{n-N+1}, \\ & (n+1)\Delta t, n\Delta t, (n-1)\Delta t, \dots, (n-N+1)\Delta t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

と書けるとき、これを N 段階 (N -step) スキーム¹⁾ という。すなわち、時刻 $t = (n+1)\Delta t$ の U^{n+1} を求める差分式に、いくつの異なる時刻の U^n が現れているか、ということである。 a_k は定数であり、 f はある既知の関数である。 f の中に U^{n+1} を含ま

¹⁾ N レベル (N -level) スキームということもある。

ない差分スキームを陽的なスキーム (explicit scheme) といい、含む差分スキームを陰的なスキーム (implicit scheme) という。また、段数 (stage) とは U^n から U^{n+1} を計算するのに関数 f を何回計算するかを表す。

3.1.1 2段階 (2-level) スキーム

2段階スキームとは、 U^{n+1} を U^n を用いて求めるスキームである。本節で扱う2段階スキームは、

- オイラスキーム (前進差分スキーム)
- 後退差分スキーム
- 台形スキーム (修正オイラスキーム)
- 松野スキーム (前進・後退スキーム)
- ホインスキーム

の5つである。この5つのスキームをそれぞれ紹介し、その誤差を考察する。

オイラスキーム (前進差分スキーム)

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = f^n,$$

すなわち、

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t f^n. \quad (3.5)$$

ただし、 $f^n = f(U^n, n\Delta t)$ である。オイラスキームの打ち切り誤差 $\varepsilon_{\text{オイラ}}$ は次のとおりである。まず $U((n+1)\Delta t)$ を $n\Delta t$ のまわりでテイラー展開して、

$$U((n+1)\Delta t) = U(n\Delta t) + \left. \frac{dU}{dt} \right|_{n\Delta t} n\Delta t + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dt^2} \right|_{n\Delta t} (n\Delta t)^2 + \dots$$

より、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{オイラ}} &= \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - f^n \\ &= \left. \frac{dU}{dt} \right|_{n\Delta t} + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dt^2} \right|_{n\Delta t} n\Delta t + \dots - f^n \\ &= \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dt^2} \right|_{n\Delta t} n\Delta t + \dots \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\varepsilon_{\text{オイラー}} = O(\Delta t).$$

後退差分スキーム

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} &= f^{n+1}, \\ U^{n+1} &= U^n + \Delta t f^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

但し, $f^{n+1} = f(U^{n+1}, (n+1)\Delta t)$ である. 後退差分スキームの打ち切り誤差 $\varepsilon_{\text{後退}}$ は次の通りである.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{後退}} &= \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - f^{n+1} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left[U^{n+1} - \left(U^{n+1} - \left. \frac{dU}{dt} \right|_{n+1} \Delta t + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dt^2} \right|_{n+1} (\Delta t)^2 + \dots \right) \right] - f^{n+1} \\ &= -\frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dt^2} \right|_{n+1} \Delta t - \dots \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\varepsilon_{\text{後退}} = O(\Delta t).$$

(3.6) は求めたい値である U^{n+1} 自体が右辺に含まれている. よって後退差分スキームは陰的なスキームである.

台形スキーム

修正オイラースキームとも, 2 次のルンゲクッタスキームとも呼ばれる.

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2} (f^n + f^{n+1}), \\ U^{n+1} &= U^n + \frac{1}{2} \Delta t (f^n + f^{n+1}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

台形スキームの打ち切り誤差 $\varepsilon_{\text{台形}}$ は次の通りである.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{台形}} &= \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} (f^n + f^{n+1}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} f^n \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} f^{n+1} \\ &= \frac{(\varepsilon_{\text{オイラー}} + \varepsilon_{\text{後退}})}{2} \\ &= \frac{1}{3} \left. \frac{d^3U}{dt^3} \right|_n (\Delta t)^2 + \dots \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\varepsilon_{\text{台形}} = O(\Delta t^2).$$

松野スキーム (前進・後退スキーム)

松野スキームは 2-level, 2-stage (2 段階 2 段) のスキームである.

$$\begin{aligned} U^* &= U^n + \Delta t f^n, \\ U^{n+1} &= U^n + \Delta t f^*. \end{aligned} \quad (3.8)$$

但し, $f^* = f(U^*, (n+1)\Delta t)$ である. 松野スキームの打ち切り誤差 $\varepsilon_{\text{松野}}$ は次のとおりである.

$$\begin{aligned} f^* &= f^n + \frac{\partial f}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + O(\Delta t^2) \\ &= f^n + \left(\frac{\partial f}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Delta t + O(\Delta t^2), \end{aligned}$$

$$U^{n+1} = U^n + \frac{dU}{dt} \Big|_n \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dt^2} \Big|_n \Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

であるため,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{松野}} &= \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - f^* \\ &= \frac{dU}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dt^2} \Delta t + O(\Delta t^2) - \left[f^n + \left(\frac{\partial f}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Delta t + O(\Delta t^2) \right] \\ &= \left[\frac{1}{2} \frac{d^2U}{dt^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right] \Delta t + O(\Delta t^2). \end{aligned}$$

ゆえに, 松野スキームは 2 次の精度をもつ.

ホインスキーム

$$\begin{aligned} U^* &= U^n + \Delta t f^n, \\ U^{n+1} &= U^n + \frac{1}{2} \Delta t (f^n + f^*). \end{aligned} \quad (3.9)$$

但し, $f^* = f(U^*, (n+1)\Delta t)$ である. ホインスキームの誤差 $\varepsilon_{\text{ホイン}}$ は松野スキームの時と同様にして,

$$\begin{aligned} f^* &= f^n + \left(\frac{\partial f}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Delta t + O(\Delta t^2), \\ U^{n+1} &= U^n + \frac{dU}{dt} \Big|_n \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dt^2} \Big|_n \Delta t^2 + O(\Delta t^3) \end{aligned}$$

なので, $\frac{d}{dt}f(U, t) = \frac{\partial U}{\partial f} \frac{dU}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$ と $\frac{dU}{dt} = f$ に注意すると,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{ホイン}} &= \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - \frac{1}{2}(f^n + f^{n+1}) \\ &= \frac{dU}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dt^2} \Delta t + O(\Delta t^2) - \left[f^n + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right] \Delta t + \frac{1}{2} O(\Delta t^2) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{d^2U}{dt^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right] \Delta t - \frac{1}{2} O(\Delta t^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dU}{dt} - f \right) \Delta t - \frac{1}{2} O(\Delta t^2) \\ &= -\frac{1}{2} O(\Delta t^2).\end{aligned}$$

ゆえにホインスキームは2次の精度をもつ.

3.1.2 3段階 (3-level) スキーム

U^{n+1} を求める式に3つの U^i が現れるスキーム. ただし, 1ステップ目の計算 (U^0 から U^1 を求めるとき) には使えない. 一般的な表現は,

$$U^{n+1} = U^{n-1} + \int_{(n-1)\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(U, t) dt. \quad (3.10)$$

本節では,

- リーフフロッグスキーム
- アダムス-バッシュフォーススキーム

の2つのスキームを紹介し, それぞれの精度について考察する.

リーフフロッグスキーム (Leapfrog scheme)

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2\Delta t f^n \quad (3.11)$$

打ち切り誤差は,

$$\begin{aligned}U^{n+1} &= U^n + \frac{dU}{dt} \Big|_n \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dt^2} \Big|_n (\Delta t)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3U}{dt^3} \Big|_n (\Delta t)^3 + O(\Delta t^4), \\ U^{n-1} &= U^n - \frac{dU}{dt} \Big|_n \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dt^2} \Big|_n (\Delta t)^2 - \frac{1}{3!} \frac{d^3U}{dt^3} \Big|_n (\Delta t)^3 + O(\Delta t^4)\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{leap} &= \frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\Delta t} - f^n \\ &= \frac{dU}{dt}\Big|_n + \frac{1}{3} \frac{d^3U}{dt^3}\Big|_n + (\Delta t)^2 + O(\Delta t^5) - f^n \\ &= O(\Delta t^2).\end{aligned}$$

アダムス-バッシュフォーススキーム (Adams-Bashforth scheme)

ここではは 2 次精度のアダムス-バッシュフォーススキームを紹介する²⁾.

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \left(\frac{3}{2}f^n - \frac{1}{2}f^{n-1} \right).$$

右辺第 2 項の段階数を増やすことで精度を上げることができる. 打ち切り誤差は,

$$f^{n-1} = f^n + \left(\frac{\partial f}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Delta t + O(\Delta t^2)$$

より,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{AB} &= \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - \left(\frac{3}{2}f^n - \frac{1}{2}f^{n-1} \right) \\ &= \frac{dU}{dt}\Big|_n + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dt^2}\Big|_n \Delta t - \left\{ f^n - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Delta t + O(\Delta t^2) \right\} + O(\Delta t^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dU}{dt} - f \right) \Delta t + O(\Delta t^2) \\ &= O(\Delta t^2).\end{aligned}$$

²⁾ アダムス-バッシュフォーススキームには 4 次精度のものもある. 4 次精度のアダムス-バッシュフォーススキームは次のとおりである.

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{24} (55f^n - 59f^{n-1} + 37f^{n-2} - 9f^{n-3}).$$

右辺第 2 項の段階数を増やすことで, 4 次以上の精度をもつスキームを作ることできる.

スキームのまとめ

2段階スキーム

オイラースキーム

$$\begin{aligned}U^{n+1} &= U^n + \Delta t f^n, \\f^n &= (U^n, n\Delta t), \\ \varepsilon &= O(\Delta t).\end{aligned}$$

後退差分スキーム

$$\begin{aligned}U^{n+1} &= U^n + \Delta t f^{n+1}, \\f^{n+1} &= (U^{n+1}, (n+1)\Delta t), \\ \varepsilon &= O(\Delta t).\end{aligned}$$

台形スキーム

$$\begin{aligned}U^{n+1} &= U^n + \frac{1}{2}\Delta t (f^n + f^{n+1}), \\ \varepsilon &= O(\Delta t^2).\end{aligned}$$

松野スキーム

$$\begin{aligned}U^* &= U^n + \Delta t f^n, \\U^{n+1} &= U^n + \Delta t f^*, \\f^* &= (U^*, (n+1)\Delta t), \\ \varepsilon &= O(\Delta t).\end{aligned}$$

ホインスキーム

$$\begin{aligned}U^* &= U^n + \Delta t f^n, \\U^{n+1} &= U^n + \frac{1}{2}\Delta t (f^n + f^*), \\f^* &= (U^*, (n+1)\Delta t), \\ \varepsilon &= O(\Delta t^2).\end{aligned}$$

3段階スキーム

リープフロッグスキーム

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2\Delta t f^n,$$

$$\varepsilon = O(\Delta t^2).$$

アダムス-バッシュフォーススキーム

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \left(\frac{3}{2}f^n - \frac{1}{2}f^{n-1} \right),$$

$$\varepsilon = O(\Delta t^2).$$

3.2 振動方程式への応用

本節では振動方程式,

$$\frac{dU}{dt} = f(U, t), \quad (3.12)$$

$$f(U, t) = i\omega U \quad (\omega \in \mathbf{R})$$

について, 様々な時間差分スキームを適用し, その安定性を調べる. 様々な偏微分方程式は最終的に振動方程式を解く問題に帰着することが多い³⁾.

³⁾偏微分方程式が振動方程式に帰着する例を2つ挙げる.

例 1) 1次元線形移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

$u = \operatorname{Re} [U(t)e^{ikx}]$ とおくと,

$$\frac{dU}{dt} + ikcU = 0$$

となつて, 振動方程式 (3.12) において $\omega = -kc$ とおいたものに等しくなる.

例 2) 慣性振動

$$\frac{du}{dt} = fv, \quad \frac{dv}{dt} = -fu.$$

複素速度 $U \equiv u + iv$ を導入すると,

$$\frac{dU}{dt} + i \frac{dv}{dt} = fv - ifu$$

$$= -if(u + iv).$$

振動方程式 (3.12) の一般解は,

$$U(t) = U(0)e^{i\omega t},$$

であり, $t = n\Delta t$ の場合,

$$U(n\Delta t) = U(0)e^{i\omega n\Delta t}$$

となる.

様々な時間スキームを適用するまえに, フォンノイマン法による安定性解析のため, 増幅係数を定義しておく.

$$\lambda \equiv \frac{U^{n+1}}{U^n}. \quad (3.13)$$

ただし,

$$\lambda = |\lambda|e^{i\theta}. \quad (3.14)$$

この時,

$$U^n = U^0|\lambda|^n e^{in\theta}. \quad (3.15)$$

とかける. 安定性は以下の様に評価される.

$$\begin{array}{ll} |\lambda| > 1 & \text{不安定} \\ |\lambda| = 1 & \text{中立} \\ |\lambda| < 1 & \text{減衰} \end{array}$$

位相については, 真の解の位相と数値解の位相との比をとって評価する. 真の解の位相は $n\omega\Delta t$, 数値解の位相は $n\theta$ であるので,

$$\frac{n\theta}{n\omega\Delta t} = \frac{\theta}{\omega\Delta t}.$$

評価は以下の通りである.

$$\begin{array}{ll} \frac{\theta}{\omega\Delta t} > 1 & \text{位相は数値解の方が速く進む} \\ \frac{\theta}{\omega\Delta t} = 1 & \text{位相は一致} \\ \frac{\theta}{\omega\Delta t} < 1 & \text{位相は数値解の方が遅く進む} \end{array}$$

正確な数値解を得るには $|\lambda|, \frac{\theta}{\omega\Delta t}$ とともに 1 に近い方がよい. そうでない場合, 「計算モード」と呼ばれる偽りの解が現れることがある. この「計算モード」は $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ にしても, 真の解に一致しない. 「計算モード」の振幅を抑制するためには, $|\lambda| < 1$ とした方がよい. 以降の節ではそれぞれのスキームを振動方程式にあてはめた場合の安定性と位相比について考察していく.

ゆえに,

$$\frac{dU}{dt} = -ifU.$$

これは, $\omega = -f$ とした振動方程式である.

3.2.1 反復しない2段階スキームの安定性

U^n から U^{n+1} を計算するのに関数 f を 1 回だけ計算する 2 段階スキームを取り扱う。この様なスキームを 2 段階 1 段のスキームなどと呼ぶこともあるが、以下では反復しない 2 段階スキームと呼ぶことにする。反復しない 2 段階スキームの一般的な式は、

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t (\alpha f^n + \beta f^{n+1}). \quad (3.16)$$

但し、

$$\alpha + \beta = 1,$$

である。 α と β の与え方によって以下のように分類される。

$$\begin{aligned} \alpha = 1, \beta = 0 & \quad \text{オイラースキーム} \\ \alpha = 0, \beta = 1 & \quad \text{後退スキーム} \\ \alpha = \beta = \frac{1}{2} & \quad \text{台形スキーム} \end{aligned}$$

振動方程式では $f = i\omega U$ なので、振動方程式のスキームの一般的な形は、

$$U^{n+1} = U^n + i\omega\Delta t (\alpha U^n + \beta U^{n+1}).$$

と表せる。増幅係数 $\lambda = \frac{U^{n+1}}{U^n}$ を導入すると、

$$\lambda = 1 + i\omega\Delta t(\alpha + \beta\lambda).$$

ゆえに、 $p \equiv \omega\Delta t$ とおくと、

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1 + i\omega\Delta t\alpha}{1 - i\omega\Delta t\beta} \\ &= \frac{1 + i\alpha p}{1 - i\beta p}, \end{aligned}$$

すなわち、

$$\lambda = \frac{1}{1 + \beta^2 p^2} (1 - \alpha\beta p^2 + ip)$$

である。それぞれのスキームについて (α, β) を代入すると、

オイラースキームの場合 $\lambda = 1 + ip$

後退スキームの場合 $\lambda = \frac{1 + ip}{1 + p^2}$

台形スキームの場合 $\lambda = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}p^2} \left(1 - \frac{1}{4}p^2 + ip \right)$

となる. ここからは, それぞれのスキームについて $|\lambda|$ を調べる.

オイラースキーム

$$|\lambda| = \sqrt{\lambda\lambda^*} = \sqrt{1+p^2} > 1.$$

よって, オイラースキームは振動方程式に対し不安定である. 但し, $p = \omega\Delta t \ll 1$ のとき,

$$\begin{aligned} |\lambda| &= 1 + \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{4}p^4 + \dots \\ &= 1 + O(\Delta t^2) \\ &= 1 + O(\Delta t^2), \end{aligned}$$

となり, フォンノイマン法の安定性条件は満たしている.

後退スキーム

$$|\lambda| = \sqrt{\lambda\lambda^*} = \frac{1}{1+p^2} \sqrt{1+p^2} = \frac{1}{1+p^2} < 1$$

よって, 後退スキームは Δt の大きさによらず安定である. 但し, ω が大きいほど減衰率も大きくなる. 実際の問題では, ω の大きい解 (高周波数解) は数值的に増幅しやすい (初期値の誤差のため). したがって, 後退差分スキームのような振動数によって選択的に減衰させるスキームは, 不要な高周波数解を除去するスキーム (フィルター) としても用いられる.

台形スキーム

$$\begin{aligned} |\lambda| &= \sqrt{\lambda\lambda^*} \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{4}p^2} \sqrt{\left(1-\frac{1}{4}p\right)^2 + p} \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{4}p^2} \sqrt{\left(1+\frac{1}{4}p\right)^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

よって, 台形スキームは中立である. 以上より, 陰的なスキームは Δt の大きさによらず安定である.

3.2.2 反復する2段階スキームの安定性

2段のスキーム, すなわち U^{n+1} をもとめるために関数 f を2回計算するスキームのことを, 以下では反復しないスキームと呼ぶことにする. 前節と同様に, 反復する2段階スキームをまとめて表すと,

$$U^{(n+1)*} = U^n + \Delta t f^n, \quad (3.17)$$

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t (\alpha f^n + \beta f^{(n+1)*}), \quad (3.18)$$

$$\alpha + \beta = 1.$$

である. α と β の与え方によって以下のように分類される.

$$\alpha = 0, \beta = 1 \quad \text{松野スキーム}$$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \quad \text{ホインスキーム}$$

(3.17) に振動方程式をあてはめると $f^n = i\omega U^n$ なので,

$$U^{(n+1)*} = U^n + i\omega \Delta t U^n. \quad (3.19)$$

また, (3.18) に振動方程式をあてはめ, (3.19) を代入すると,

$$\begin{aligned} U^{(n+1)} &= U^n + \Delta t (\alpha i\omega U^n + \beta i\omega U^{(n+1)*}) \\ &= U^n + i\omega \Delta t \{ \alpha U^n + \beta (U^n + i\omega \Delta t U^n) \} \\ &= U^n + i\omega \Delta t \{ (\alpha + \beta) U^n + i\omega \Delta t \beta U^n \} \\ &= U^n (1 + i\omega \Delta t - \omega^2 \Delta t^2 \beta) \end{aligned}$$

ここで再び $p \equiv \omega \Delta t$ とおき, 整理すると,

$$U^{n+1} = (1 - \beta p^2 + ip) U^n.$$

ゆえに, 増幅係数 λ は定義から,

$$\lambda = \frac{U^{n+1}}{U^n} = 1 - \beta p^2 + ip \quad (3.20)$$

である. それぞれのスキームについて β の値を代入すると,

$$\text{松野スキームの場合 } \lambda = 1 - p^2 + ip$$

$$\text{ホインスキームの場合 } \lambda = 1 - \frac{1}{2} p^2 + ip$$

となる。ここからは、それぞれのスキームについて $|\lambda|$ を調べる。

松野スキーム

松野スキームの場合 $\beta = 1$ であるから、松野スキームの増幅係数は、

$$\lambda = 1 - p^2 + ip, \quad (3.21)$$

である。先ほど述べたように、安定性を調べるには $|\lambda|$ を求めればよかった。したがって、

$$\begin{aligned} |\lambda| &= \sqrt{\lambda\lambda^*} \\ &= \sqrt{(1 - p^2 + ip)(1 - p^2 - ip)} \\ &= \sqrt{(1 - p^2)^2 + p^2} \\ &= \sqrt{1 - p^2 + p^4}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

安定となるのは $|\lambda| \leq 1$ のときなので、 $|p| \leq 1$ であればよい。 $p = \omega\Delta t$ なので、

$$|\omega\Delta t| \leq 1.$$

さらに、 $\Delta t \geq 0$ なので、

$$\Delta t \leq \frac{1}{|\omega|}. \quad (3.23)$$

松野スキームの p に対する $|\lambda|$ の振る舞いを知るために、 $|\lambda|$ の極値を考える。(3.21) を p で微分して、

$$\begin{aligned} \frac{d|\lambda|}{dp} &= \frac{4p^3 - 2p}{2\sqrt{p^4 - p^2 + 1}} \\ &= \frac{2p^3 - p}{\sqrt{p^4 - p^2 + 1}} \end{aligned}$$

なので、 $|\lambda|$ は $p = 1/2$ で極値になることがわかる。 $0 \leq p \leq 1/2$ の範囲では ω が大きいほど $|\lambda|$ が小さくなる。Matsuno (1966) では、多数の振動数をもつ系では $0 < p < 1/2$ となるように Δt を与える方がよいと指摘している。なぜなら、 $0 < p < 1/2$ の範囲では ω が大きいほど減衰率が大きいので、ノイズとなる可能性のある高周波成分をより早く減衰させることができるからである。

ホインスキーム

ホインスキームの増幅係数は、(3.20) において $\beta = 1/2$ とすればよく、

$$\lambda = 1 + ip - \frac{1}{2}p^2 \quad (3.24)$$

である。松野スキームのときと同様にして、安定性を調べるために $|\lambda|$ を求める。

$$\begin{aligned}
 |\lambda| &= \sqrt{\lambda\lambda^*} \\
 &= \sqrt{(1 + ip - \frac{1}{2}p^2)(1 - ip - \frac{1}{2}p^2)} \\
 &= \sqrt{(1 - \frac{1}{2}p^2)^2 + p^2} \\
 &= \sqrt{1 + \frac{1}{4}p^4}. \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

(3.25) は $p > 0$ で常に 1 より大きくなるので、振動方程式に対してホインスキームは不安定である。しかし、 $p = \omega\Delta t \ll 1$ のとき $|\lambda|$ を $p = 0$ のまわりで展開すると、

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{1}{4}p^4\right)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{4}p^4 + O(p^8) \\
 &= 1 + \frac{1}{8}p^4 + O(p^8) \\
 &= 1 + O(\Delta t^4).
 \end{aligned}$$

となる。ゆえに、

$$|\lambda| = 1 + O(\Delta t^4) < 1 + O(\Delta t),$$

となり、フォンノイマンの安定性条件を満たす。

2 段階スキームの安定性に関する議論をまとめると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 |\lambda_{\text{オイラー}}| &= \sqrt{1 + p^2}, \\
 |\lambda_{\text{後退}}| &= \frac{1}{1 + p^2}, \\
 |\lambda_{\text{台形}}| &= 1, \\
 |\lambda_{\text{松野}}| &= \sqrt{1 - p^2 + p^4}, \\
 |\lambda_{\text{ホイン}}| &= \sqrt{1 + \frac{1}{4}p^4}.
 \end{aligned}$$

それぞれのスキームの増幅係数の大きさを図示すると次のようになる。

3.2.3 2 段階スキームの位相

本節では 1 時間ステップあたりの位相 θ と位相比 θ/p について考える。先ほども扱ったとおり、数値解は、

$$U^n = 1 + |\lambda|U^0 e^{in\theta} = \lambda^n U^0, \tag{3.26}$$

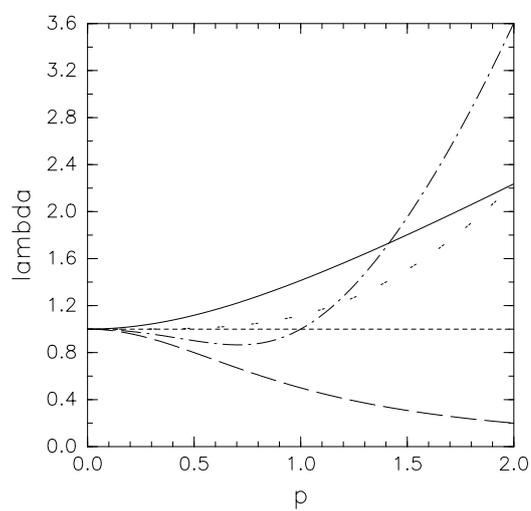


図 3.2.1: 5 つの 2 段階スキームの増幅係数の振る舞い. 横軸は $p = \omega \Delta t$, 縦軸は $|\lambda|$ をとっている. 実線はオイラースキーム, 破線は後退スキーム, 細点線は台形スキーム, 1 点鎖線は松野スキーム, 点線はホインスキームをそれぞれ表している.

であり、真の解は、

$$U(n\Delta t) = U(0)e^{inp}, \quad (3.27)$$

である。ここで、(3.26) の増幅係数 λ を実部 λ_{re} と虚部 λ_{im} に書き直すと、

$$U^n = (\lambda_{re} + i\lambda_{im})^n U^0. \quad (3.28)$$

また、(3.14) より、 $\lambda_{re} + i\lambda_{im} = |\lambda|e^{i\theta}$ なので、

$$\tan \theta = \frac{\lambda_{im}}{\lambda_{re}}.$$

よって、数値解の位相は、

$$\theta = \arctan \frac{\lambda_{im}}{\lambda_{re}}. \quad (3.29)$$

また、真の解の位相に対する数値解の位相の比は、

$$\frac{\theta}{p} = \frac{1}{p} \arctan \frac{\lambda_{im}}{\lambda_{re}}, \quad (3.30)$$

となる。以下では各スキームについて位相を見ていくことにする。

オイラースキーム

オイラースキームは $\lambda = 1 + ip$ なので、位相比 (3.30) は、

$$\frac{\theta}{p} = \frac{1}{p} \arctan p < 1.$$

ゆえに、オイラースキームの場合、数値解の位相は真の解に比べて遅く進む。

後退スキーム

後退スキームは $\lambda = \frac{1+ip}{1+p^2}$ なので、(3.30) は、

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{p} &= \frac{1}{p} \arctan \frac{\frac{p}{1+p^2}}{\frac{1}{1+p^2}} \\ &= \frac{1}{p} \arctan p. \end{aligned}$$

ゆえに、オイラースキームと同様に、数値解の位相は真の解に比べて遅く進む。

台形スキーム

台形スキームは $\lambda = \frac{1}{1+p^2} \left(1 - \frac{1}{4}p^2 + ip\right)$ なので、

$$\frac{\theta}{p} = \frac{1}{p} \arctan \frac{p}{1 - \frac{1}{4}p^2}.$$

$p \ll 1$ のとき, $p = 0$ のまわりで展開すると,

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{p} &= \frac{1}{p} \arctan \frac{p}{1 - \frac{1}{4}p^2} \\ &= \frac{1}{p} \arctan \{p(p + p^2 + p^4 + \dots)\} \\ &= \frac{1}{p} \left\{ (p + p^3 + p^5 + \dots) - \frac{(p + p^3 + p^5 + \dots)^3}{3} + \frac{(p + p^3 + p^5 + \dots)^5}{5} - \dots \right\} \end{aligned}$$

ここで, p の 3 次以上の寄与を無視すると,

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{p} &\approx \frac{1}{p} \left(p - \frac{p^3}{3} + \frac{p^5}{5} - \dots \right) \\ &= \frac{1}{p} \arctan p < 1. \end{aligned}$$

また, 3 次までの寄与を考慮すると,

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{p} &\approx \frac{1}{p} \left(p + p^3 - \frac{(p + p^3)^3}{3} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{p} \left(p + p^3 + \frac{p^3}{3} + O(p^5) \right) \\ &= 1 + \frac{2}{3}p^2 + O(p^3) > 1. \end{aligned}$$

よって, p が 0 の近傍ではオイラースキームと同様に, 数値解の位相は真の解の位相に比べて遅く進み, p が増加するにつれて早く進むことがわかる.

松野スキーム

松野スキームは $\lambda = 1 - p^2 + ip$ なので,

$$\frac{\theta}{p} = \frac{1}{p} \arctan \frac{p}{1 - p^2}.$$

これは台形スキームと同様の形になる. したがって, p が 0 の極近傍では数値解の位相は真の解の位相に比べて遅く進み, p が増加するにつれて早く進む.

ホインスキーム

ホインスキームは $\lambda = 1 - \frac{1}{2}p^2 + ip$ なので,

$$\frac{\theta}{p} = \frac{1}{p} \arctan \frac{p}{1 - \frac{1}{2}p^2}.$$

これも台形スキームと同様の形になるので, p が 0 の付近では遅く, p が増加するにつれて早く進む.

3.2.4 3段階スキーム

本節では振動方程式に対し、3段階スキームをあてはめた場合の安定性と位相の振る舞いを考察する。

リープフロッグスキーム

振動方程式に対してリープフロッグスキームをあてはめた差分式は、

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2i\omega\Delta t U^n. \quad (3.31)$$

差分式を見てわかるとおり、3段階スキームを用いた場合には、初期値として U^0 と U^1 の2つの値を必要とする。ここで、 U^0 は物理的な初期値、 U^1 は U^0 から何らかの方法で計算し求めた初期値である。増幅係数 λ を計算すると、 $U^n = \lambda U^{n-1}$ 、 $U^{n+1} = \lambda U^n$ なので、

$$U^{n+1} = \lambda^2 U^{n-1},$$

となる。これらを (3.31) に代入して、

$$\lambda^2 U^{n-1} = U^{n-1} + 2i\omega\Delta t \lambda U^{n-1}.$$

両辺を U^{n-1} で割り、整理すると、

$$\lambda^2 - 2i\omega\Delta t \lambda - 1 = 0.$$

これを λ について解くと、

$$\lambda = ip \pm \sqrt{1 - p^2}, \quad (3.32)$$

を得る。(3.32) から明らかなように、3段階スキームの場合 λ は2つ存在する。一般に、 m 段階スキームには $(m - 1)$ 個の増幅係数が現れる。 λ_1, λ_2 に対応するそれぞれの数値解をモード (mode) と呼ぶ。

リープフロッグスキームの場合に現れる増幅係数を、(3.32) より、

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{1 - p^2} + ip, \\ \lambda_2 &= -\sqrt{1 - p^2} + ip. \end{aligned} \quad (3.33)$$

とおき、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限を考える。 $\Delta t \rightarrow 0$ のとき、 λ_1 の場合は $\lambda_1 \rightarrow 1$ 、 $U^{n+1} = U^n$ となる。 λ_2 の場合は $\lambda_2 \rightarrow -1$ 、 $U^{n+1} = -U^n$ となる。そこで、 λ_1 に対応する数値解を物理モード (physical modes)、 λ_2 に対応する数値解を計算モード (computational mode) と呼ぶことにする。実際の計算で得られる数値解はこれらのモードの重ね合わせになる。物理モードと計算モードの重ね合わせを考える前に、極端な例として $\omega = 0$ の場合を考える。このとき、振動方程式は、

$$\frac{dU}{dt} = 0,$$

であり、差分式は、

$$U^{n+1} = U^{n-1},$$

である。これは U^1 の与え方によって、解の振る舞いに変化する。すなわち、 U^1 が U^0 から正しく計算された場合、

$$U^{n+1} = U^n,$$

となり、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限での λ_1 のモードに対応する。ゆえに、

$$U^{n+1} = \lambda_1 U^n.$$

この場合、解は物理モードのみから構成される。一方、 U^1 が $U^1 = -U^0$ と与えられた場合、

$$U^{n+1} = -U^n,$$

となり、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限での λ_2 のモードに対応する。すなわち、

$$U^{n+1} = \lambda_2 U^n,$$

であり、解は計算モードのみから構成される。

次に一般の場合、つまり $\omega \neq 0$ の場合を考える。この時、振動方程式の解は、

$$\begin{aligned} U_1^n &= \lambda_1^n U_1^0, \\ U_2^n &= \lambda_2^n U_2^0 \end{aligned}$$

の重ね合わせで表現される。したがって、 a と b を定数とすると、解 U^n は、

$$U^n = a\lambda_1^n U_1^0 + b\lambda_2^n U_2^0 \quad (3.34)$$

と表される。(3.34) を U^0 と U^1 を用いて表すと、

$$\begin{aligned} U^0 &= aU_1^0 + bU_2^0, \\ U^1 &= a\lambda_1 U_1^0 + b\lambda_2 U_2^0. \end{aligned}$$

これを aU_1^0 と bU_2^0 の連立方程式と考えて解くと、

$$\begin{aligned} aU_1^0 &= \frac{\lambda_2 U^0 - U^1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \\ bU_2^0 &= \frac{\lambda_1 U^0 - U^1}{\lambda_1 - \lambda_2}. \end{aligned}$$

これらを (3.34) に代入すると、

$$\begin{aligned} U^n &= \lambda_1^n \frac{\lambda_2 U^0 - U^1}{\lambda_2 - \lambda_1} + \lambda_2^n \frac{\lambda_1 U^0 - U^1}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} [\lambda_1^n (U^1 - \lambda_2 U^0) - \lambda_2^n (U^1 - \lambda_1 U^0)]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

よって、物理モードの振幅は $|U^1 - \lambda_2 U^0|$ に、計算モードの振幅は $|U^1 - \lambda_1 U^0|$ にそれぞれ比例することがわかる。(3.33) は $U^1 = \lambda_1 U^0$ のとき、

$$\begin{aligned} U^n &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_1^n (\lambda_1 - \lambda_2) U^0 \\ &= \lambda_1^n U^0 \end{aligned}$$

となる。一方、 $U^1 = \lambda_2 U^0$ のとき、

$$\begin{aligned} U^n &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_2^n (\lambda_1 - \lambda_2) U^0 \\ &= \lambda_2^n U^0 \end{aligned}$$

となる。したがって、 U^1 の選び方が重要になる。計算モードを除去するために U^1 を $U^1 = \lambda_1 U^0$ と求めることは、どのような場合でもできるわけではない。実際、数値計算は解析的に解を求められない複雑な方程式を解く場合が多い。このような場合は(3.12)のように解析的に物理モードを求めることはできない。したがって、 U^1 はオイラースキームやホインスキームなどの2段階スキームから求める。

計算モードを完全に取り除くことは不可能であるため、物理モードの増幅係数 λ_1 、計算モードの増幅係数 λ_2 とともに1より小さいことが必要となる。すなわち、

$$|\lambda_1| < 1 \quad \text{かつ} \quad |\lambda_2| < 1.$$

より詳しく安定性を考察するには、 $|p| < 1$ 、 $|p| = 1$ 、 $|p| > 1$ の3つの場合にわけると考えやすい。

$|p| < 1$ のとき

$1 - p^2 > 0$ なので(3.33)より、

$$\begin{aligned} |\lambda_1| &= \sqrt{\lambda_1 \lambda_1^*} = 1, \\ |\lambda_2| &= \sqrt{\lambda_2 \lambda_2^*} = 1. \end{aligned} \tag{3.36}$$

よって、 $|p| < 1$ のとき、安定性は中立である。位相については(3.29)より、

$$\theta = \arctan \frac{\lambda_{im}}{\lambda_{re}}$$

より、

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \arctan \frac{p}{\sqrt{1 - p^2}}, \\ \theta_2 &= \arctan -\frac{p}{\sqrt{1 - p^2}} \end{aligned} \tag{3.37}$$

$p \rightarrow 0$ のときの位相の振る舞いについて考える. 右極限 $p \rightarrow +0$ を考えると, 物理モード, 計算モードともに,

$$\begin{aligned}\lambda_{im} &= |\lambda| \sin \theta \\ &= p \quad (0 < \theta < \pi)\end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}\tan \theta_1 &= \frac{p}{\sqrt{1-p^2}} > 0, \\ \tan \theta_2 &= -\frac{p}{\sqrt{1-p^2}} < 0.\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned}0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2} < \theta_2 < \pi.\end{aligned}$$

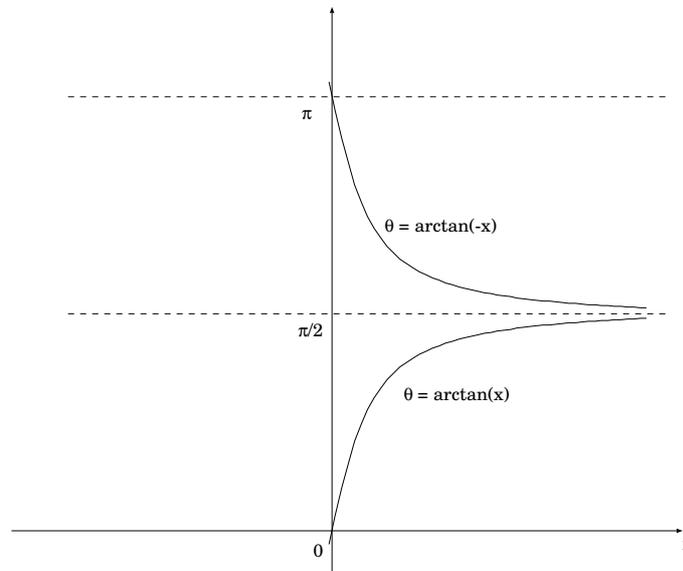


図 3.2.2: リープフロッグスキームにおける物理モードと計算モードの位相の振る舞いを示す. ただし, $x = p/\sqrt{1-p^2}$ である.

図 3.2.2 より,

$$\theta_2 = \pi - \theta_1.$$

特に, $p \rightarrow 0$ のとき, $\theta_1 \rightarrow p$, $\theta_2 \rightarrow \pi - p$ である. $p = \omega \Delta t$ であるから, $\Delta t \rightarrow 0$ のとき物理モードの位相は真の解の位相に近づくことがわかる. 一方, 計算モードの

位相は π ずれてしまう. 同様に $p < 0$ で左極限 $p \rightarrow -0$ を考えると,

$$\begin{aligned}\lambda_{im} &= |\lambda| \sin \theta \\ &= p.\end{aligned}$$

したがって $-\pi < \theta < 0$.

$$\begin{aligned}-\pi &< \theta_1 < -\frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{2} &< \theta_2 < 0\end{aligned}$$

であるから,

$$\theta_2 = -\pi - \theta_1.$$

結局, $p \geq 0$ をまとめて表すと,

$$\theta_2 = \pm\pi - \theta_1 \quad (\text{複号同順}) \quad (3.38)$$

となる.

物理モードの位相 θ_1 の振る舞いは次の通りである. $p \ll 1$ のとき,

$$\theta_1 = \arctan \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}$$

なので, $|x| < 1$ のとき, $\arctan x$ のマクローリン展開,

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

を用いると,

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \arctan \frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \\ &\sim \arctan \left\{ p \left(1 + \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{4}p^4 + \dots \right) \right\} \\ &\sim \left(p + \frac{p^3}{2} \right) - \frac{\left(p + \frac{1}{2}p^3 \right)^3}{3} + \dots \\ &\sim p + \frac{p^3}{6} + \dots.\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\frac{\theta_1}{p} = 1 + \frac{p^2}{6} > 1.$$

リープフロッグスキームの物理モードの位相は真の解よりも早く進む。但し、松野スキームよりは遅い。次に、 θ_1 の微分を考える。

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_1}{dp} &= \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \right)^2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} + \frac{p^2}{\sqrt{1-p^2}(1-p^2)} \right) \\ &= (1-p^2) \left(\frac{1}{\sqrt{1-p^2}(1-p^2)} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}.\end{aligned}$$

$\frac{d\theta_1}{dp} > 0$, $p \rightarrow 1$ のとき, $\theta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$. さらに $p \geq 0$ のとき $\theta_2 = \pm\pi - \theta_1$. したがって,

$$\begin{aligned}U_1^n &= U_1^0 e^{in\theta_1}, \\ U_2^n &= U_2^0 e^{in(\pm\pi - \theta_1)}.\end{aligned}\tag{3.39}$$

簡単のために $\theta_1 = \frac{\pi}{8}$ の場合を考える。さらに、初期において $\text{Im}(U_1^0) = 0$, $\text{Im}(U_2^0) = 0$ とする。このとき、物理モード U_1^n の位相は反時計回りに $\frac{\pi}{8}$ ずつずれる。計算モード ($p > 0$) の位相は $\theta_2 = \pi - \theta_1$ より時計回りに進む。

$$\begin{aligned}U_2^n &= U_2^0 e^{in(\pi - \theta_1)} \\ &= U_2^0 e^{in\pi} e^{-in\theta_1} \\ &= (-1)^n U_2^0 (\cos n\theta_1 - i \sin n\theta_1)\end{aligned}$$

より、計算モードを実部と虚部にわけて図示すると、

$$\begin{aligned}\text{Re}[U_2^n] &= (-1)^n U_2^0 \cos n\theta_1, \\ \text{Im}[U_2^n] &= (-1)^{n+1} U_2^0 \sin n\theta_1\end{aligned}$$

なので、図のようになる。

$|p| = 1$ の場合

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ip$$

なので、

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1.\tag{3.40}$$

ゆえに、この場合物理モードも計算モードもともに安定性は中立である。位相は、

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \arctan \frac{\lambda_{im}}{\lambda_{re}}, \\ \tan \theta_1 &= \frac{\lambda_{im}}{\lambda_{re}} \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

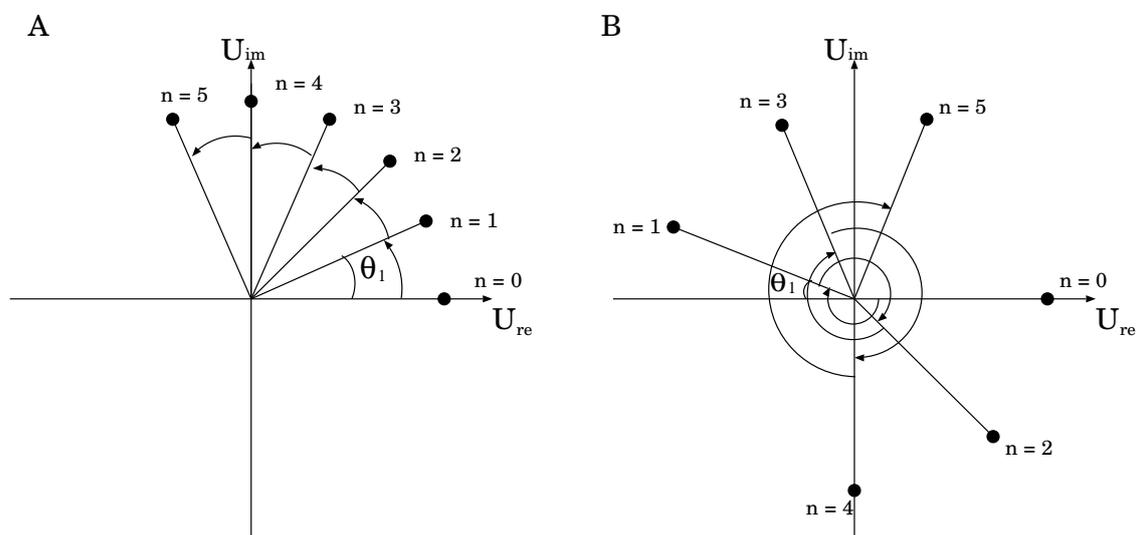


図 3.2.3: リープフロッグスキームの物理モード (A) と計算モード (B) の位相の変化を, 縦軸に U_{im} , 横軸に U_{re} をとって示した図. 図は $\theta_1 = \frac{\pi}{8}$ の場合である.

であるから,

$$\theta_1 = \theta_2 = \pm \frac{\pi}{2} \quad (p = \pm 1). \quad (3.41)$$

このとき解はどちらのモードも,

$$U^n = U^0 e^{\pm i n \frac{\pi}{2}} \quad (3.42)$$

となる.

$|p| > 1$ の場合

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= i(p + \sqrt{p^2 - 1}), \\ \lambda_2 &= i(p - \sqrt{p^2 - 1}). \end{aligned}$$

括弧の中身が実数であることに注意すれば,

$$\begin{aligned} |\lambda_1| &= |p + \sqrt{p^2 - 1}|, \\ |\lambda_2| &= |p - \sqrt{p^2 - 1}| \end{aligned} \quad (3.43)$$

である. したがって,

$$\begin{aligned} |\lambda_1| &> 1 \quad (p > 1), \\ |\lambda_2| &> 1 \quad (p < -1). \end{aligned}$$

ゆえに, 安定性は不安定である. $|p|$ が 1 を越えると, 急激に不安定になる. 例えば, $p > 1$ のとき,

$$\frac{d|\lambda_1|}{dp} = 1 + \frac{p}{\sqrt{p^2 - 1}}.$$

よって, $p \rightarrow +1$ のとき発散する. 位相は $|p| = 1$ のときと同様にして,

$$\theta_1 = \theta_2 = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (3.44)$$

解は,

$$\begin{aligned} U_1^n &= |p + \sqrt{p^2 - 1}|^n U_1^0 e^{\pm i n \frac{\pi}{2}}, \\ U_2^n &= |p - \sqrt{p^2 - 1}|^n U_2^0 e^{\pm i n \frac{\pi}{2}}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

位相の進み方は $|p| = 1$ のときと同じだが, 振幅は時間とともに増加することがわかる.

(3.44) であるから, 不安定なモードの周期は $4\Delta t$ となる. これは図 3.2.4 からわかる.

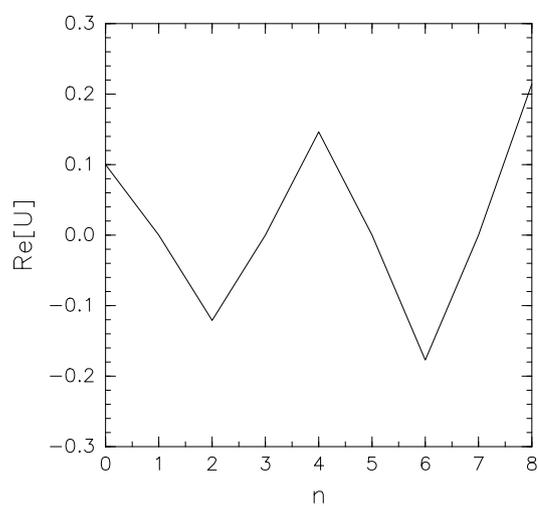


図 3.2.4: $|p| > 1$ の場合のリープフロッグスキームの不安定モード. $|\lambda| = 1.1$ としている. 横軸に n , 縦軸に U の実部をとっている. 図から振動の周期は $4\Delta t$ であることがわかる.

リープフロッグスキームのまとめ

リープフロッグスキームの利点は2次精度であることと、 $|\omega\Delta t| \leq 1$ のときに安定であることである。一方、欠点は計算モードの安定性が中立であることと、非線形方程式の場合に計算モードの増加する場合があることである。なお、計算モードを排除するには、途中で2段階スキームを差し込むとよい。

アダムス-バッシュフォーススキーム

振動方程式にアダムス-バッシュフォーススキームを用いた場合、(3.1.2) において $f = i\omega U$ より、

$$\begin{aligned} U^{n+1} &= U^n + \Delta t \left(\frac{3}{2}f^n - \frac{1}{2}f^{n-1} \right) \\ &= U^n + i\omega\Delta t \left(\frac{3}{2}U^n - \frac{1}{2}U^{n-1} \right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

となる。このとき増幅係数 λ は、

$$\begin{aligned} U^n &= \lambda U^{n-1}, \\ U^{n+1} &= \lambda U^n = \lambda^2 U^{n-1} \end{aligned}$$

を(2.50)に代入して、

$$\lambda^2 - \left(1 + i\frac{3}{2}p \right) \lambda + i\frac{1}{2}p = 0.$$

但し、 $p \equiv \omega\Delta t$ である。ゆえに、アダムス-バッシュフォーススキームもリープフロッグスキームと同様に2つの λ をもつ。上式を λ について解くと、

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left[1 + i\frac{3}{2}p + \sqrt{1 - \frac{9}{4}p^2 + ip} \right], \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left[1 + i\frac{3}{2}p - \sqrt{1 - \frac{9}{4}p^2 + ip} \right]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

$p \rightarrow 0$ のとき、 $\lambda_1 \rightarrow 1$ 、 $\lambda_2 \rightarrow 0$ である。したがって、 λ_1 に対応するモードが物理モード、 λ_2 に対応するモードが計算モードである。 p が十分小さいとき、計算モードは減衰する。これはアダムス-バッシュフォーススキームの利点である。そこで、 $|p| < 1$ のときの λ_1 と λ_2 の振る舞いを調べる。(3.47) の根号の部分をテイラー展開し、地道に計算すると、

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + ip - \frac{1}{2}p^2 + i\frac{1}{4}p^3 - \frac{1}{8}p^4 + \dots, \\ \lambda_2 &= i\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p^2 - i\frac{1}{4}p^3 + \frac{1}{8}p^4 - \dots. \end{aligned}$$

実部と虚部に分けて表すと,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \left(1 - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{8}p^4 - \dots\right) + i \left(p + \frac{1}{4}p^3 + \dots\right), \\ \lambda_2 &= \left(\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{8}p^4 + \dots\right) + i \left(\frac{1}{2}p - \frac{1}{4}p^3 - \dots\right)\end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}|\lambda_1| &= \sqrt{\lambda_1 \lambda_1^*} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}p^4 + \dots\right)^{\frac{1}{2}}, \\ |\lambda_2| &= \sqrt{\lambda_2 \lambda_2^*} \\ &= \left(\frac{1}{4}p^2 + \dots\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{3.48}$$

さらにテイラー展開すると最終的に,

$$\begin{aligned}|\lambda_1| &= 1 + \frac{1}{4}p^4 + \dots, \\ |\lambda_2| &= \frac{1}{2}p + \dots\end{aligned}\tag{3.49}$$

を得る. $|\lambda_1|$ も $|\lambda_2|$ もともに 1 より大きいので, アダムス-バッシュフォーススキームの物理モードは不安定である. 但し, 増幅係数は $O(p^4)$ なので Δt を十分小さくとればあまり問題はない. また, 4 段階数のアダムス-バッシュフォーススキームなら物理モードは安定であることも知られている.

3.3 摩擦方程式への応用

3.2 節では様々なスキームを振動方程式に適用し, その安定性を考察した. 本節では様々なスキームを摩擦方程式に適用し, その安定性を考察する. 摩擦方程式は以下のように表される.

$$\frac{dU}{dt} = -\kappa U, \quad U = U(t), \quad \kappa > 0.\tag{3.50}$$

例) 熱伝導方程式

熱伝導方程式は,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \sigma > 0,$$

と表される. ここで,

$$u(x, t) = \operatorname{Re}[U(t)e^{ikx}]$$

とおくと,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\sigma k^2 U.$$

これは (3.50) において, $\kappa = \sigma k^2$ とした場合に等しい. (3.50) の一般解は,

$$U(t) = U(0)e^{-\kappa t}. \quad (3.51)$$

よって, 実部も虚部も時間の経過とともに指数的に減少する.

反復しない2段階スキーム

それでは, 様々なスキームを (3.50) に適用したときの性質を, 再びフォンノイマン法を用いて調べてみよう.

まず, 反復しない2段階スキーム (3.16) を摩擦方程式に適用すると,

$$U^{n+1} = U^n - \kappa \Delta t (\alpha U^n + \beta U^{n+1}) \quad (3.52)$$

となる. $K \equiv \kappa \Delta t$ と定義すると,

$$U^{n+1} = U^n - K(\alpha U^n + \beta U^{n+1}).$$

U^{n+1} について解くと,

$$U^{n+1} = \frac{1 - \alpha K}{1 + \beta K} U^n \quad (3.53)$$

となる.

オイラースキーム

オイラースキームの場合, (3.53) において, $\alpha = 1, \beta = 0$ である. よって, (3.53) は,

$$U^{n+1} = (1 - K)U^n.$$

フォンノイマンの安定性条件は $\lambda \leq 1$ であったので,

$$|1 - K| \leq 1,$$

すなわち,

$$0 < K \leq 2 \quad (3.54)$$

がオイラースキームを摩擦方程式にあてはめた場合の安定性条件となる. ただし, $\lambda = 1 - K$ であるので, 解を振動させないためには $K < 1$ とする必要がある. 振動

方程式にオイラースキームをあてはめた場合の安定性条件は $p \ll 1$ が安定性条件であった。したがって、同じスキームを用いた場合でも、対象となる方程式が異なれば安定性の条件もまた異なることがわかる。

後退差分スキーム

後退差分スキームの場合 $\alpha = 0, \beta = 1$ なので、(3.53) は、

$$U^{n+1} = \frac{1}{K+1}U^n.$$

よって、安定性条件は、

$$\left| \frac{1}{1+K} \right| \leq 1,$$

すなわち、

$$0 < K$$

に対して後退差分スキームは常に安定であり、解は振動しない。

台形スキーム

台形スキームの場合 $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ なので、(3.53) は、

$$U^{n+1} = \frac{1 - \frac{1}{2}K}{1 + \frac{1}{2}K}U^n.$$

よって安定性条件は、

$$\left| \frac{1 - \frac{1}{2}K}{1 + \frac{1}{2}K} \right| \leq 1,$$

すなわち、

$$0 < K < 2.$$

ゆえに、 $0 < K$ に対して台形スキームは安定であり、 $K < 2$ であれば解は振動しない。

反復する2段階スキーム

次に, 反復する2段階スキームを考える. 反復する2段階スキームは (3.17), (3.18) で表される. 今, $f^n = -\kappa U^n$ なので,

$$\begin{aligned} U^{(n+1)*} &= U^n - \kappa \Delta t U^n, \\ U^{n+1} &= U^n + \Delta t \{ \kappa \alpha U^n + \beta (-\kappa) (U^n - \kappa \Delta t U^n) \} \\ &= U^n - \kappa \Delta t \alpha U^n + (\kappa \Delta t)^2 \beta U^n - \kappa \Delta t \beta U^n \\ &= \{ 1 - \kappa \Delta t (\alpha + \beta) + (\kappa \Delta t)^2 \beta \} U^n \\ &= \{ 1 - \kappa \Delta t + (\kappa \Delta t)^2 \beta \} U^n \\ &= (1 - K + K^2 \beta) U^n. \end{aligned}$$

ゆえに, 松野スキームもホインスキームも, 十分小さい K に対して安定となる.

3段階スキーム

最後に, 3段階スキームについて考える.

リープフロッグスキーム

(3.50) にリープフロッグスキームを適用すると,

$$\frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\Delta t} = \kappa U^n,$$

ゆえに,

$$U^{n+1} = U^{n-1} - 2\Delta t \kappa U^n.$$

ここで, (3.31) での議論と同様にして増幅係数 λ を導入すると,

$$\begin{aligned} U^{n+1} &= U^{n-1} - 2\Delta t \kappa U^n, \\ \lambda^2 U^{n-1} &= U^{n-1} - 2\Delta t \kappa \lambda U^{n-1}, \\ \lambda^2 &= 1 - 2K\lambda, \\ \lambda^2 + 2K\lambda - 1 &= 0. \end{aligned}$$

この λ についての2次方程式を解くと,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -K + \sqrt{1 + K^2}, \\ \lambda_2 &= -K - \sqrt{1 + K^2}. \end{aligned}$$

$K \rightarrow 0$ のとき, $\lambda_1 \rightarrow 1$, $\lambda_2 \rightarrow -1$ となる. したがって, λ_1 が物理モードに対応し, λ_2 が計算モードに対応する. $K > 0$ すなわち, 通常の時間積分に対して $\lambda_2 < -1$

なので、計算モードは常に不安定である。つまり時間ステップごとに解は形をかえ、大きさは増大してしまう。前に述べたとおり、計算モードを完全に取り除くことは難しいうえに、無視することもできないほどの大きさである。よって、摩擦方程式に対してリープフロッグスキームは常に不安定である。

アダムス-バッシュフォーススキーム

アダムス-バッシュフォーススキームは、

$$U^{n+1} = U^n - \kappa \Delta t \left(\frac{3}{2} U^n - \frac{1}{2} U^{n-1} \right)$$

と表される。リープフロッグスキームの場合と同様に増幅係数を導入し、 $K \equiv \kappa \Delta t$ とおけば、

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \lambda - \frac{3}{2} K \lambda + \frac{1}{2} K, \\ \lambda^2 - \left(1 - \frac{3}{2} K \right) \lambda - \frac{1}{2} K &= 0. \end{aligned}$$

この λ に関する 2 次方程式を解くと、

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2} K \pm \sqrt{1 - K + \frac{9}{4} K^2} \right)$$

を得る。ゆえに、アダムス-バッシュフォーススキームの場合、 K が十分小さければ常に安定であり、計算モードは減衰する。

3.4 複数のスキームを組み合わせた場合

例えば、振動方程式と摩擦方程式を組み合わせたような式、すなわち、

$$\frac{dU}{dt} = i\omega U - \kappa U$$

という式を数値計算したい場合はどうすればよいだろうか。振動項 $i\omega U$ に有効なリープフロッグスキームをもちいたところではある。しかしながら、リープフロッグスキームは先ほど調べたように摩擦項 $-\kappa U$ に対して用いることはできない。この様な場合、異なるスキームをそれぞれ別の項に適用することができる。すなわちこの例でいえば、振動項に対してはリープフロッグスキームを、摩擦項に対してはオイラスキームをそれぞれ用いればよい。すると、

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2\Delta t(i\omega U^n - \kappa U^{n-1})$$

となる。他のスキームの組み合わせももちろん可能である。

第4章 1次元移流方程式の数値解法

従属変数の移流を記述した移流方程式を簡単化した方程式を考える。簡単化と言ったのは、1 従属変数, 2 独立変数の場合のみを考えるということである。実際のモデルでは独立変数の数が多くなる。移流方程式は事実上, 大気支配方程式の最も大事な部分である。

4.1 2次精度中心差分を用いた差分化

考えるべき方程式は以下の通りである。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c = \text{const.} \quad (4.1)$$

ここで, $u = u(x, t)$ は独立変数が2つの関数である。 x は空間の変数であるので, (4.1) は1次元線形移流方程式と呼ばれる。(4.1)の一般解は,

$$u = f(x - ct) \quad (4.2)$$

である。 f は任意の関数である。

(4.1) に対する有限差分法の1つは, 時間方向にオイラースキーム (前進差分), 空間方向に上流差分を用いた方法である。

さて, (4.1) の空間微分を中心差分で置き換えると, 時間微分に対して次の式を得る。

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = -c \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x}. \quad (4.3)$$

下付き添字の j は前にも言った通り, 空間方向の原点からの距離の増分を表している。つまり $x = j\Delta x$ である。(4.2) の時間微分に当てはめるスキームによって, (4.1) の数値解法にはいくつかのスキームが考えられる。

4.1.1 リーフログスキーム

時間微分にリーフログスキームを当てはめると次の式を得る.

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = -c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}. \quad (4.4)$$

スキームの作り方はこの他にもいろいろあることを強調しておく. (4.4) のようにつくられたスキームの性質は振動方程式に当てはめた時間差分スキームの既知の性質から推測することができる. (4.4) の解を,

$$u_j = \text{Re}[U(t)e^{ikj\Delta x}] \quad (4.5)$$

と仮定し, (4.3) に代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (Ue^{ikj\Delta x}) &= -\frac{c}{2\Delta x} (Ue^{ik(j+1)\Delta x} - Ue^{ik(j-1)\Delta x}) \\ e^{ikj\Delta x} \frac{dU}{dt} &= -\frac{c}{2\Delta x} e^{ikj\Delta x} (e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}) U \\ \frac{dU}{dt} &= -\frac{c}{2\Delta x} \{(\cos k\Delta x + i \sin k\Delta x) - (\cos k\Delta x - i \sin k\Delta x)\} U \\ &= -\frac{c}{2\Delta x} 2i \sin k\Delta x U \\ &= i \left(-\frac{c}{\Delta x} \sin k\Delta x \right) U. \end{aligned} \quad (4.6)$$

となる. (4.6) において,

$$\omega \equiv -\frac{c}{\Delta x} \sin k\Delta x \quad (4.7)$$

とおけば, (4.6) は第3章で扱った振動方程式に等しくなる. よって, 1次元線形移流方程式を差分化して安定性と位相の振る舞いを考察する方法は, 3章第2節の内容と同じである. ただし周波数 ω は (4.7) で与えられるものとする.

リーフログスキームを用いて (4.6) を時間差分化すると,

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2i \left(-c \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin k\Delta x \right) U^n. \quad (4.8)$$

第3章の表記を用いれば,

$$p \equiv -c \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin k\Delta x. \quad (4.9)$$

と書ける. したがって, (4.4) の性質は (4.7) と, 振動方程式にリーフログスキームを適用するという既知の性質から推測することができる.

安定性の考察

3章2節の考察から, リーフログスキームの安定性に関して, すべての ω に対

して $|p| \leq 1$ という条件が必要であった. この条件を今回のスキームにあてはめると, すべての k に対して,

$$\left| c \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin k\Delta x \right| \leq 1$$

であることが必要である. $|\sin k\Delta x|$ は k の大きさに依らず高々 1 であるので, 安定性条件は,

$$|c| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (4.10)$$

となる. 条件 (4.10) は CFL 条件であり, 第 2 章で既に導出している. CFL 条件は Δt と Δx を単に小さくしただけでは安定性を得られないことを示している. 安定性を得るために重要なことは $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ の値を小さくすることである.

$|p|$ が最大値をとるとき, すなわち最も不安定な場合は, $k\Delta x = \frac{\pi}{2}$ の波のときである. 対応する波長の長さは $\frac{2\pi}{k} = 4\Delta x$ であり, 解像可能な最大波長の 2 倍の長さである.

計算モードと物理モード

U^n には 2 つの解がある. 計算モードと物理モードである.

$$\begin{aligned} U_1^n &= \lambda_1^n U_1^0, \\ U_2^n &= \lambda_2^n U_2^0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

λ_1 と λ_2 は第 3 章で定義した通り,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{1-p^2} + ip, \\ \lambda_2 &= -\sqrt{1-p^2} + ip \end{aligned}$$

である. $|p| \geq 0$ の場合,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= e^{i\theta}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\right), \\ \lambda_2 &= e^{i(\pm\pi-\theta)} = -e^{-i\theta}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

(4.5) を用いると数値解 u_j^n は,

$$u_j^n = \sum_k u_k^{n\Delta t} e^{ikj\Delta x}$$

と表せる. 解が物理モードのみで構成されるとすると,

$$\begin{aligned}
 u_j^n &= \operatorname{Re} [U(t)e^{ikj\Delta x}] \\
 &= \operatorname{Re} [U_1^0 \lambda_1^n e^{ikj\Delta x}] \\
 &= \operatorname{Re} [U_1^0 e^{ni\theta} e^{ikj\Delta x}] \\
 &= \operatorname{Re} [U_1^0 e^{ik(j\Delta x + \frac{n\theta}{k})}] \\
 &= \operatorname{Re} [U_1^0 e^{ik(j\Delta x + \frac{\theta}{k\Delta t} n\Delta t)}].
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

解が計算モードのみで構成されるとすると, 同様にして,

$$u_j^n = \operatorname{Re} [(-1)^n U_2^0 e^{ik(j\Delta x - \frac{\theta}{k\Delta t} n\Delta t)}] \tag{4.14}$$

となる. (4.13) と (4.14) を, (4.1) の解析解のフーリエ表現,

$$u(x, t) = \operatorname{Re} [U(0)e^{ik(x-ct)}] \tag{4.15}$$

と比較する. すると, 物理モードの位相速度 c_1 は,

$$c_1 = -\frac{\theta}{k\Delta t}.$$

計算モードの位相速度 c_2 は,

$$\begin{aligned}
 c_2 &= \frac{\theta}{k\Delta t}. \\
 \theta &= \arctan \left(\frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \right)
 \end{aligned}$$

なので, $\Delta t \rightarrow 0$ の極限では,

$$p = -c \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin k\Delta x \rightarrow 0 \quad (\Delta t \rightarrow 0).$$

ゆえに,

$$\theta \rightarrow p.$$

さらに, $\Delta x \rightarrow 0$ の極限では,

$$\begin{aligned}
 c_1 &= -\frac{\theta}{k\Delta t} \\
 &\approx c
 \end{aligned}$$

となる. 同様にして,

$$c_2 = -c.$$

ゆえに, 物理モードの位相速度は $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$ のとき解析解の位相速度 c に一致し, 計算モードの位相速度は $-c$ になることがわかる. また, (4.14) に $(-1)^n$ が含まれていることから, 計算モードでは 1 ステップごとに符号を変える.

4.1.2 松野スキーム

4.1.1 節では (4.6) の時間微分をリーブフロックスキームを用いて差分化した, 今度は松野スキームを適用してみる. まず, 近似値 $u_j^{(n+1)*}$ を, 前進差分を用いて計算する.

$$\frac{u_j^{(n+1)*} - u_j^n}{\Delta t} = -c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}. \quad (4.16)$$

ここで得られた近似値 $u_j^{(n+1)*}$ を後退差分スキームで用い, U^{n+1} を求める.

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -c \frac{u_{j+1}^{(n+1)*} - u_{j-1}^{(n+1)*}}{2\Delta x}. \quad (4.17)$$

(4.16) を (4.17) へ代入し, 近似値 $u_j^{(n+1)*}$ を消去すると,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + c^2 \Delta t \frac{u_{j+2}^n - 2u_j^n + u_{j-2}^n}{(2\Delta x)^2}. \quad (4.18)$$

(4.18) は右辺第 2 項を除けば, (4.3) の時間微分に前進差分を用いた有限差分スキームになっている. 右辺第 2 項は $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ の時ゼロに近づく. したがって, (4.18) もまた移流方程式に一致するスキームである. 他方, Δt を固定し $\Delta x \rightarrow 0$ としたとき, 右辺第 2 項は $c^2 \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ に近づく. $c^2 \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ は拡散項の近似となっており, この項は減衰効果を表している. しかしながら, この減衰効果は波長による. 右辺第 2 項は波長 $4\Delta x$ のとき, $4\Delta x$ の波長をもつ波に対して最大の減衰効果が生じる. 一方で, $2\Delta x$ の波長をもつ解では, 減衰は生じない. 移流方程式を解く際に減衰効果が望ましい場合もあるが, この特殊な減衰効果の波長依存性は好ましくない. 以上の考察から, 松野スキームは移流方程式を解くのに適切な時間差分スキームではない.

4.1.3 エネルギー法を用いた安定性の考察

エネルギー法を用いた安定性の考察は便利である. というのも, 非線形方程式系に適用できることに加えて, 安定性の条件を知ることにも使えるからである. ここでは (4.3) を解くのに使用するスキームの安定性を調べるためにエネルギー法を用いる.

(4.3) を解くのに用いられるスキームの一般形は,

$$u_j^{n+1} - u_j^n = -\frac{1}{2} \mu (u_{j+1}^* - u_{j-1}^*), \quad (4.19)$$

ただし,

$$\mu \equiv c \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (4.20)$$

と書ける. u_j^* は u_j^n の線形結合で表される. 例えば, 反復しない2段階スキームを記述するなら,

$$u_j^* = \alpha u_j^n + \beta u_j^{n+1}. \quad (4.21)$$

反復する2段階スキームなら,

$$u_j^* = u_j^n - \frac{\beta}{2}\mu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (4.22)$$

と書ける. アダムス-バッシュフォーススキームなら,

$$u_j^* = \frac{3}{2}u_j^n - \frac{1}{2}u_j^{n-1}, \quad (4.23)$$

である. 実際に上記の u^* を (4.19) に代入すれば, それぞれ対応するスキームを得ることができる.

では, 反復しない2段階スキームの安定性を, エネルギー法を用いて考察する. まず (4.19) に u_j^* をかけて, すべての j について和をとると,

$$\sum_j u_j^*(u_j^{n+1} - u_j^n) = -\frac{1}{2}\mu \sum_j u_j^*(u_{j+1}^* - u_{j-1}^*).$$

周期境界条件を仮定すれば右辺は消去できるので,

$$\sum_j u_j^*(u_j^{n+1} - u_j^n) = 0. \quad (4.24)$$

また, $\beta = 1 - \alpha$ を (4.21) に代入して,

$$u_j^* = \alpha u_j^n + (1 - \alpha)u_j^{n+1}.$$

これを, この後使いやすいように, 次のように変形しておく.

$$u_j^* = \frac{1}{2}(u_j^{n+1} + u_j^n) - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)(u_j^{n+1} - u_j^n). \quad (4.25)$$

u_j^n と u_j^{n+1} の2乗の差を考える. (4.24), (4.25) を用いると,

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{1}{2} ((u_j^{n+1})^2 - (u_j^n)^2) &= \sum_j \frac{1}{2} (u_j^{n+1} + u_j^n)(u_j^{n+1} - u_j^n) \\ &= \sum_j \left\{ u_j^* + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)(u_j^{n+1} - u_j^n) \right\} (u_j^{n+1} - u_j^n) \\ &= \sum_j \left\{ u_j^*(u_j^{n+1} - u_j^n) + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)(u_j^{n+1} - u_j^n)^2 \right\} \\ &= \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \sum_j (u_j^{n+1} - u_j^n)^2 \end{aligned}$$

ゆえに, $\alpha > 1/2$ の場合は不安定なスキーム, $\alpha = 1/2$ の場合は安定で中立なスキーム, $\alpha < 1/2$ の場合は安定で減衰するスキームである. 減衰するスキームの場合, 全エネルギー $\sum_j \frac{1}{2}(u_j^n)^2$ は時間とともに単調に減少する.

4.1.4 Lax-Wendroff スキーム

この章の締めくくりとして, Lax と Wendroff によって提唱されたスキームを考察する. このスキームは Lax-Wendroff スキーム, あるいはもっと正確に言うと, 2 段階 Lax-Wendroff スキームと呼ばれる. これまで議論してきたスキームとは対照的に, Lax-Wendroff スキームは移流方程式の時間微分, 空間微分の差分近似法を任意に選ぶことができない.

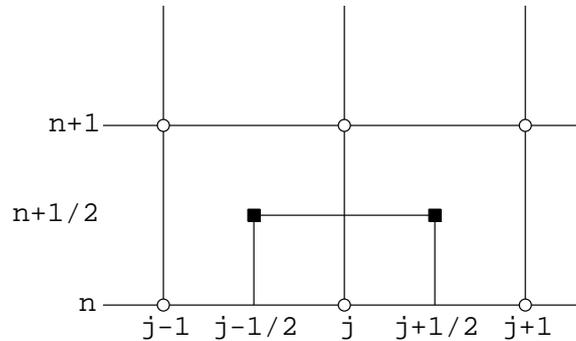


図 4.1.1: Lax-Wendroff スキームを構成するために用いられる格子.

Lax-Wendroff スキームの手順を記述するために, 図 4.1.1 に示すような格子を用意する. まず, 2 つの直行する格子の中間の値を, 仮の値として計算する. これは空間方向に中心差分, 時間方向に前進差分を用いる. $u_{j+1/2}^n$ と $u_{j-1/2}^n$ をとり, 隣接する 2 つの格子点の u_j^n を平均計算を用いて算出する. したがって,

$$\begin{aligned} \frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n)}{\frac{1}{2}\Delta t} &= -c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}, \\ \frac{u_{j-1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n)}{\frac{1}{2}\Delta t} &= -c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

仮の値 $u_{j+1/2}^{n+1/2}, u_{j-1/2}^{n+1/2}$ を用いて, 時間, 空間ともに中央の別のステップを計算する.

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -c \frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x}. \quad (4.27)$$

仮の値 (4.26) を (4.27) に代入して,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2} c^2 \Delta t \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (4.28)$$

を得る. (4.28) は (4.18), すなわち松野スキームと非常に似ている. 唯一の違いは最後の項のみである. この最後の項は $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ のときゼロに近づく. しかしながら, Δt を固定し $\Delta x \rightarrow 0$ とした場合, (4.28) の最後の項は $\frac{1}{2} c^2 \Delta t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$ となる. これは拡散項に収束するよう見えるが, (4.18) と比べて係数 $\frac{1}{2}$ が異なっている. この最後の項による減衰効果は波長 $2\Delta x$ のとき最大となる. この減衰効果の波長依存性は有限差分法の減衰を考察する際に望ましい. なぜならば後ほど考察するように, 短い波長とりわけ $2\Delta x$ 近傍の波長に対する有限差分計算においては深刻な問題が存在するからである. 2格子間隔の波長をもつ波を選択的に落とす, 散逸スキームを適用することで, この問題を多少回避することも可能である.

(4.18) が時間方向に1次精度であるのに対し, (4.28) の打ち切り誤差は $O[(\Delta x)^2] + O[(\Delta t)^2]$ であるから, 時間空間方向どちらも2次の精度をもつ.

Lax-Wendroff スキームの安定性を見積もるために,

$$u_j^n = \text{Re}[U^n e^{ikj\Delta x}] \quad (4.29)$$

を (4.28) へ代入する. すると,

$$U^{n+1} = [1 + \mu - 2(\cos k\Delta x - 1) - i\mu \sin k\Delta x] U^n. \quad (4.30)$$

故に増幅係数 λ は,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{U^{n+1}}{U^n} \\ &= 1 + \mu^2(\cos k\Delta x - 1) - i\mu \sin k\Delta x. \end{aligned} \quad (4.31)$$

となる.

$$\begin{aligned} \cos k\Delta x - 1 &= -2 \sin^2 \frac{k\Delta x}{2}, \\ \sin k\Delta x &= 2 \sin \frac{k\Delta x}{2} \cos \frac{k\Delta x}{2}, \end{aligned}$$

であるので, 最終的に,

$$|\lambda| = \left[1 - 4\mu^2(1 - \mu^2) \sin^4 \frac{k\Delta x}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.32)$$

となる. 故に, Lax-Wendroff スキームの安定性条件は $1 - \mu^2 \geq 0$ すなわち,

$$|c| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

となることである。これは以前にも出てきた CFL 条件である。Lax-Wendroff スキームは $|c|\Delta t/\Delta x < 1$ のとき減衰する。減衰の波長依存性と μ の依存性をより詳しく分析する。解像可能な最小波長、すなわち波長が $2\Delta x$ のとき、 $k\Delta x = \pi$ であるから、

$$|\lambda| = (1 - 4\mu^2 + 4\mu^4)^{1/2} = |1 - 2\mu^2|. \quad (4.33)$$

倍波長すなわち $4\Delta x$ のとき、 $k\Delta x = \pi/2$ なので、

$$|\lambda| = (1 - \mu^2 + \mu^4)^{1/2}. \quad (4.34)$$

一般的に、

$$\frac{d|\lambda|}{d\mu} = -\frac{4\mu(1 - 2\mu^2) \sin^4 \frac{k\Delta x}{2}}{[1 - 4\mu^2(1 - \mu^2) \sin^4 \frac{k\Delta x}{2}]^{1/2}}$$

であるから、すべての $|\lambda|$ は $\mu = 1/\sqrt{2}$ のとき最小となる。 $|\lambda|$ が最小となる μ を (4.32) に代入すると、増幅係数 λ の最小値は

$$\left(1 - \sin^4 \frac{k\Delta x}{2}\right)^{1/2} \quad (4.35)$$

であることがわかる。波長が最小値 $2\Delta x$ から増加すると、 $|\lambda|$ の最小値はゼロから単調増加し、波長が無限大に発散するにしたがい 1 へ近づく。

Lax-Wendroff スキームの欠点

波長 $2\Delta x$ と $4\Delta x$ に対する増幅係数は (4.33) と (4.34) で計算したように、図 1.2 のようになる。一般的には波長が短いほど、減衰の量は大きくなる。とりわけ、 $2\Delta x$ のとき減衰は大きい。減衰の量は時間ステップと移流速度にも依存している。この依存性は Lax-Wendroff スキームの欠点である。なぜなら、物理的に、減衰が時間ステップや移流速度に依存することはなく、また時間ステップや移流速度の値を変えることにより減衰を制御することは、現実の現象にそぐわないため不可能である。例えば、十分小さい μ に対して、(4.32) をテーラー展開すると、

$$|\lambda| = 1 - 2\mu^2 \sin^4 \frac{k\Delta x}{2} + \dots$$

となる。 $\mu = c\Delta t/\Delta x$ であるから、上の式は $n\Delta t$ を固定したときに、全体の減衰効果が Δt に比例する形で近似されることを示している。よって、減衰効果を抑制したい場合には Δt を適当に設定する必要がある。ところが、スキームの精度や安定性の観点からすれば、 Δt は減衰効果の抑制に合わせて設定するのではなく、最適な精度と安定性を保証する Δt をとることが望ましい。

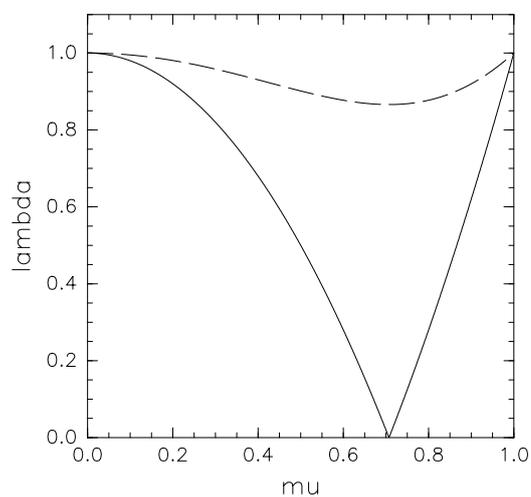


図 4.1.2: (4.33) と (4.34) で記述される, Lax-Wendroff スキームの増幅係数の大きさを示す. 縦軸に $|\lambda|$, 横軸に μ をとっている. ただし, $\mu = c\Delta t/\Delta x$ である. 破線は波長が $4\Delta x$ のときを, 実線は波長が $2\Delta x$ のときをそれぞれ表す.

Lax-Wendroff スキームの利点

Lax-Wendroff スキームは陽的スキームなので計算速度が比較的速い。2次精度が保証されている。また、2段階スキームなので、計算モードも現れない。空間中心差分と第3章で学んだ7つの時間差分法のうちの1つを組み合わせて得られるスキームは、どれ一つとしてこの利点をもっていない。Lax-Wendroff スキームの減衰効果が物理的な散逸に比べて無視できる程度の影響であれば、Lax-Wendroff スキームの減衰効果はそれほど問題にならない。そしてまた最も短い波長の制御にも有用である。もし物理的な散逸の小さな、あるいは無視できる現象を取り扱う場合には、別の中立の時間差分スキームを用いるのがよい。

4.2 数値分散

1次元移流方程式を数値的に解くと、空間差分のために「数値分散」という現象が生じる。本節では数値分散とその仕組みについて考察する。これまでの議論と同様に、1次元線形移流方程式、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c = \text{const}, \quad (4.36)$$

に対して $u(x, t)$ をフーリエ展開し、ある波数成分の解、

$$u(x, t) = \text{Re}[U(t)e^{ikx}] \quad (4.37)$$

について考える。ただし、(4.37) は

$$\frac{dU}{dt} + ikcU = 0 \quad (4.38)$$

を満たす。(4.38) の振動方程式において、 kc は振動数 ν に等しい。位相速度を c_{ph} を表記することにする。したがって、(4.37) の位相速度は定義から、

$$c_{ph} \equiv \frac{\nu}{k} = \frac{kc}{k} = c.$$

よって、すべての波長の波は物理的な移流速度と同じ位相速度で伝播する。位相速度は波数 k に依らないので、元の連続形の式では分散性はない。

それでは、空間微分のみを差分化した式

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + c \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = 0 \quad (4.39)$$

を考える。(4.39) は (4.36) を空間方向に中央差分を用いることで得られる。(4.39) は微分方程式でも差分方程式でもなく、微分と差分の混合した方程式である。このような方程式を差分微分方程式、または準離散方程式という。(4.39) を適合性のある時間差分で近似したとき得られる有限差分方程式は、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限で (4.39) に近づく。例えば時間微分にオイラースキームを適用すると、

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = 0. \quad (4.39')$$

よって、(4.39) は (4.39') の $\Delta t \rightarrow 0$ の極限になっている。

時間微分はそのまま微分の形をしているので、(4.39) に現れる誤差は空間差分によるものと考えることができる¹⁾。

(4.39) に対し、連続形の式 (4.36) を考察したときと同様にして、

$$u_j(t) = \text{Re}[U(t)e^{ikj\Delta x}], \quad (4.40)$$

を代入する。このとき $U(t)$ の満たす式として、

$$\frac{dU}{dt} + ik \left(c \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} \right) U = 0. \quad (4.41)$$

(4.38) と比較すると、差分微分方程式 (4.39) の振動数 ν^* は、

$$\nu^* = k \left(c \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} \right)$$

と考えることができる。この時 (4.39) の位相速度 c_{ph}^* は、

$$c_{ph}^* \equiv \frac{\nu^*}{k} = c \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} \quad (4.42)$$

となる。位相速度が波数 k に依存しているため、(4.39) の解には分散性が現れる。このように、離散化したことにより解に分散性が現れることを「数値分散」という。

(4.42) の波数 k 依存性について調べる。 $k\Delta x$ がゼロから増加するにつれて、 c_{ph}^* は単調に減少する。また、解像可能な最小波長 ($2\Delta x$) のとき、 $k = 2\pi/\Delta x$ より $c_{ph}^* = 0$ になる。ゆえに、どの波数成分の位相速度も解析解の位相速度よりも小さくなる可以说える。また、波長 $2\Delta x$ の成分の位相速度はゼロ、すなわち定在波となる。

波長 $2\Delta x$ の波が変化しない理由は、図 4.2.3 で表されているように、波の描画をみれば明らかである。この波長の波については、すべての格子点において $u_{j+1} = u_{j-1}$ であり、(4.39) より、 $\frac{\partial u_j}{\partial t}$ がゼロとなるためである。

¹⁾この様に、差分微分方程式はある空間差分近似の数値解の性質を調べるために用いられる。

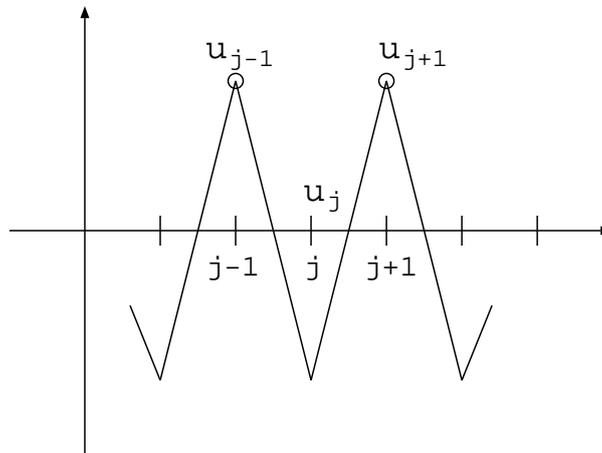


図 4.2.3: 波長 $2\Delta x$ の解の模式図. すべての点で $u_{j+1} = u_{j-1}$ となることがわかる.

次に (4.42) から群速度を計算する. 連続形の式 (4.36) の場合, 群速度 c_g は,

$$c_g = \frac{d(kc)}{dk} = c. \quad (4.43)$$

したがって, 群速度は一定であり, 位相速度 c_{ph} に一致することがわかる. しかしながら, 差分微分方程式 (4.39) の群速度 c_g^* は,

$$c_g^* = \frac{d(kc^*)}{dk} = c \cos k\Delta x. \quad (4.44)$$

したがって, $k\Delta x$ がゼロから増加すると, 群速度 c_g^* は単調に減少し,

$$\begin{aligned} k\Delta x = \frac{\pi}{2} (\text{波長: } 4\Delta x) \text{ のとき } c_g^* &= 0, \\ k\Delta x = \pi (\text{波長: } 2\Delta x) \text{ のとき } c_g^* &= -c \end{aligned}$$

となる.

以上の結果をまとめると, 図 4.2.4 のようになる. 厳密な移流方程式 (4.36) において個々の波, 波束ともに, つまり波の重ね合わせが最大となる場所は, 同じ速度 $c = c_g$ で伝播する. (4.39) のように空間に中央差分を用いると, 位相速度と群速度はともに波数の増加とともに減少する. 誤差は解像可能な最小波長 $2\Delta x$ に対してとりわけて大きくなる. $4\Delta x$ より短い波長の波は負の群速度をもっている. これはつまり, $4\Delta x$ より短い波長の波で構成された波束は移流速度と個々の波の伝播方向とは反対の方向に伝播することを示している.

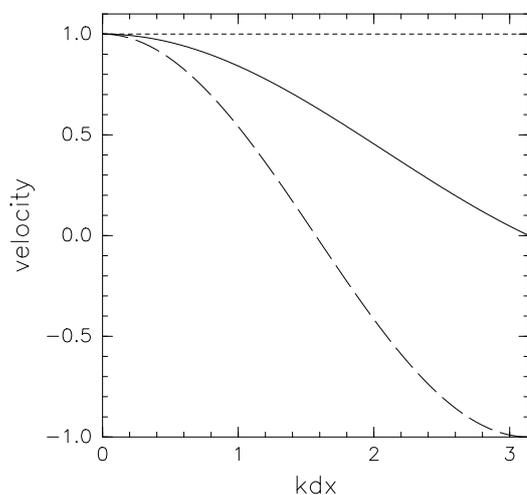


図 4.2.4: 移流速度 $c = 1.0$ のときの連続形での位相速度と群速度, 並びに, 差分形での位相速度と群速度. 縦軸は位相速度と群速度の大きさ, 横軸は $k\Delta x$ である. 点線は連続形での位相速度と群速度 $c = c_g$, 実線は差分形での位相速度 c_{ph}^* , 破線は差分形での群速度 c_g^* をそれぞれ表す.

群速度の分散性の具体例

空間的になめらかな関数 $Y(x)$ を考える. 例えば, 長波長の正弦関数とってもらえればよい. $Y(x)$ を空間方向に離散化したものを Y_j とし, $Y_j = Y(j\Delta x)$ とおく.

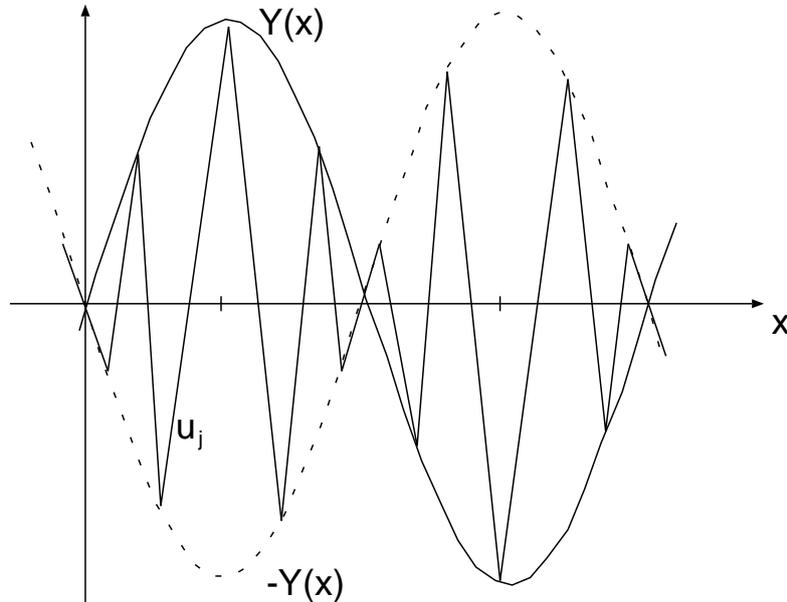


図 4.2.5: 関数 $u_j, \pm Y(x)$ を 2 次精度中心差分を用いて計算したときの波形.

次に, 図 4.2.5 に表されるように, Y_j を用いて表される波,

$$u_j \equiv (-1)^j Y_j, \quad (4.45)$$

を考える. すると, 関数 $\pm Y(x)$ は関数 u_j の包絡線となる. (4.45) を (4.39) に代入すると,

$$\frac{\partial Y_j}{\partial t} - c \frac{Y_{j+1} - Y_{j-1}}{2\Delta x} = 0.$$

上の式を見てもらえばわかるとおり, Y_j の移流は移流速度の符号が逆である点以外 u_j の移流と式の形は同じである. したがって, u_j の個々の短い波長の波は x 軸方向にゆっくりと伝播する. その包絡線は長い波長の波 $\pm Y_j$ となり, 比較的速い速度で u_j とは反対の方向に伝播する. 1 つの振動数から構成されるようにするため, 正弦関数を用いた場合, Y_j は形を変えずに伝播する. (4.45) から, u_j もまた形を変えずに移流しなければならない. これより, u_j も高周波成分から構成されていると考えなければならない. 他方, 関数 $Y(x)$ が多数の高周波成分から構成されているとすると, 高周波成分の数値分散のために $Y(x)$ と u_j の波形はともに移流の過程で変形しているはずである.

差分微分方程式の解析解

(4.39) の解析解について考える. 無次元の時間の変数,

$$\tau \equiv \frac{ct}{\Delta x} \quad (4.46)$$

を定義し, (4.39) の両辺を $c/2\Delta x$ で割り τ を用いて,

$$2 \frac{d}{d\tau} u_j(\tau) = u_{j-1}(\tau) - u_{j+1}(\tau), \quad (4.47)$$

と書き直すと便利である. (4.47) は 第 1 種ベッセル関数の満たす微分を含む漸化式に等しい.

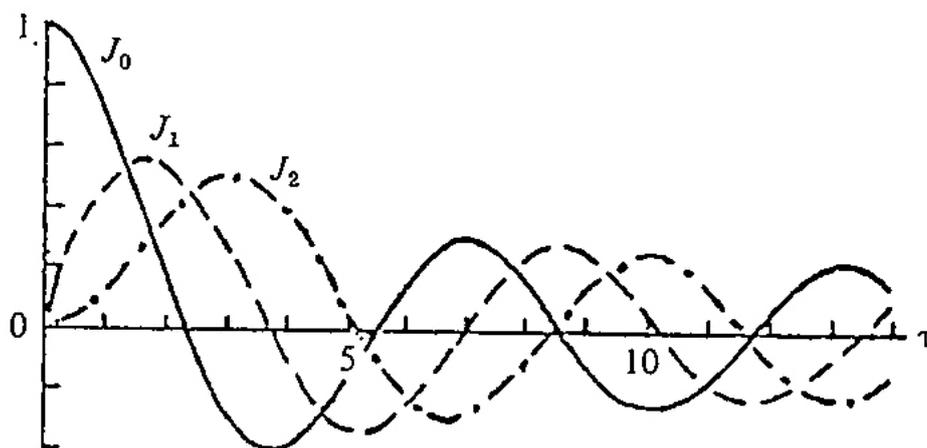


図 4.2.6: $j = 0, 1, 2$ のときのベッセル関数 $J_0(\tau)$, $J_1(\tau)$, $J_2(\tau)$.

j 次の第 1 種ベッセル関数を $J_j(\tau)$ と表すと,

$$u_j(\tau) = J_j(\tau) \quad (4.48)$$

が成り立つ. $j = 0$ となる格子点のとり方は任意であるため, (4.47) において下付き添字 j はあらゆる整数値をとることができる. p を任意の整数とすれば, (4.48) より一般的な解として,

$$u_j(\tau) = J_{j-p}(\tau)$$

を得る. 線形方程式 (4.39) を解いているので, 一般解はこれらの線形結合で表現される. すなわち,

$$u_j(\tau) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p J_{j-p}(\tau). \quad (4.49)$$

ただし, a_p は任意の定数である. ここで, $\tau = 0$ において, j_0 を除くすべての関数 J_k はゼロ, $J_0(0) = 0$ である. それゆえ, (4.49) に $\tau = 0$ を代入すると,

$$u_j(0) = a_j. \quad (4.50)$$

したがって, (4.49) の定数は任意の初期条件 $u_j = u_j(0)$ を満たすように選ぶことができる. 定数は任意の初期条件を満たすので, (4.49) は (4.47), または (4.39) の一般解を表している.

例として初期条件を

$$u_j(0) = \begin{cases} 1 & \text{for } j = 0 \\ 0 & \text{for } j \neq 0, \end{cases} \quad (4.51)$$

とし, 別の無次元時間 τ の値について (4.48) のもっとも単純な解をもう少し考察する.

最初の瞬間に, 図 4.2.7 上段に示されるように, 原点 $j = 0$ にパルス波を, 関数 u_j に与える. (4.47) より, $\frac{du_j}{d\tau}$ は $j = -1, 1$ のときそれぞれ $\frac{du_j}{d\tau} = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ であるが, それ以外の点では $\frac{du_j}{d\tau} = 0$ である.

ゆえに, 初期に与えた擾乱は x 軸の正方向と負方向にそれぞれ同じ比率で伝播する. (4.48) によれば, その後の擾乱の伝播は図 4.2.6, より正確に言えばベッセル関数の表を用いることで追跡することができる. この方法で $\tau = 5, 10$ のときの解を図 4.2.7 の中段と下段にそれぞれ示した.

図 4.2.7 に示した 3 つの絵は 2 次精度空間中央差分を用いた数値分散の例を表している. ここで, 初期条件 $u(x, 0)$ が δ 関数で与えられた場合, 余弦フーリエ展開すると,

$$u(x) = \int_0^\infty a(k) \cos kx \, dk$$

$$, a(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty u(x) \cos kx \, dx$$

と表される. δ 関数は,

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x = 0 \\ 0 & \text{for } x \neq 0, \end{cases}$$

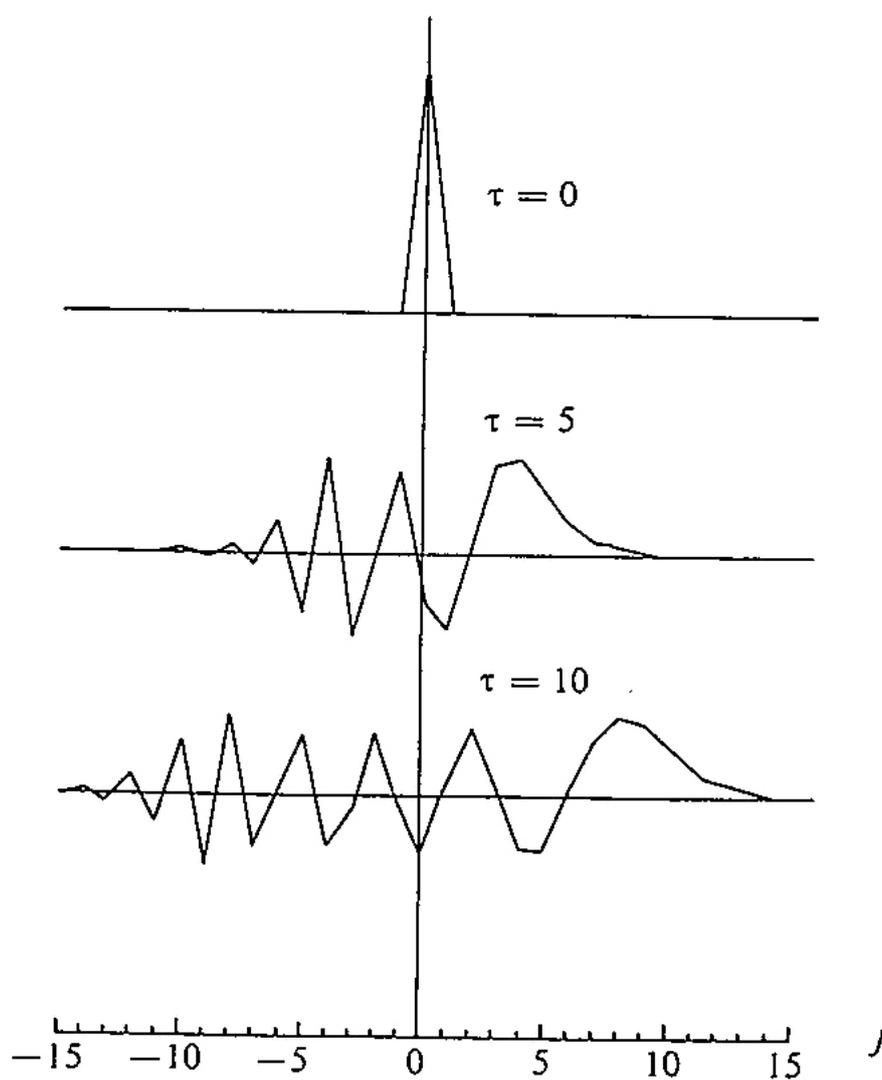


図 4.2.7: (4.49) の解析解. $\tau = 0, 5, 10$ のときをそれぞれ示す.

であるので $a(k)$ を格子点のみを使って数値的に計算すると,

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{2}{\pi} \sum_j u(j\Delta x) \cos(j\Delta x) \Delta x \\ &= \frac{2}{\pi} u(0) \cos 0\Delta x \\ &= \frac{2}{\pi} \Delta x. \end{aligned}$$

となる. したがって, すべての波長成分の振幅が $2/\pi\Delta x$ となる. 光学の用語を用いれば, そのような擾乱をホワイトノイズ (white noise) と呼ぶ. 各フーリエ成分は分散をもたらしながら, 図 4.2.4 のように異なる位相速度で伝播する. ここで選んだ無次元時間もちいて, (4.47) から, 物理的移流速度は $j = \tau$ において正の値をとるべきである. しかし, 空間の差分近似のために, すべての位相速度は物理的な移流速度よりも小さい. 図 2.5 から分かるように主擾乱は物理的移流速度よりやや小さい速度で移流する.

物理的な移流方向とは反対方向に進む波長の短い波は, 差分化に伴う群速度のために生じている. これらの波の様子は移流方程式の物理的な性質と矛盾するので, この様な波のことを寄生波 (parasitic waves) と呼ぶ.

なお, この差分方程式の解は真の解の近似としては, 明らかに不十分である. これは, 1 点のみに初期擾乱を与えると, 高波長フーリエ成分が数値分散を引き起こすためである.

4.3 中心差分でない空間差分法を用いた場合

(4.36) の中心差分を用いない空間差分を考える. 中心差分でない場合でも 2 つの格子点での値を用いることにする. 物理的な観点からすると, 2 つの点として着目する点と, 流体が移流する方向に 1 つずれた点を用いるのがよさそうである. したがって, (4.36) の近似式として次の式を考える.

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + c \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x} = 0, \quad \text{for } c > 0, \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + c \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} = 0, \quad \text{for } c < 0, \quad (4.53)$$

上の 2 式は 4.2 節でも扱った差分微分方程式である. (4.52) は後退差分を, (4.53) は前進差分を, それぞれ空間差分法に用いている. しかしながら, どちらの場合も差分は上流から計算される. それゆえ, これらの差分法を上流差分と呼ぶ. 反対側から計算する差分法の場合は, これを下流差分と呼ぶ.

(4.52), (4.53) は時間微分に様々なスキームを適用することができる. その結果得られたスキームは空間方向に 1 次精度しかない. しかし, 上流差分は中心差分に比べ, 擾乱は物理的な移流方向の反対方向に伝播しないという利点がある. すなわち, 中心差分と違い, 寄生波によって解が汚染されることはない.

$c > 0$ として, 時間方向にオイラースキームを用いると,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0. \quad (4.54)$$

これは第 2 章で例として挙げたスキームである. そして, このスキームには減衰のあること, 減衰の程度は波長に依存していること, 解像可能な差最も短い波長は $2\Delta x$ であることを考察した.

上流差分の利点

下流差分や中央差分と比較すると, 少なくとも原理的には上流差分を用いることで得られる利点は, 差分スキームで用いる格子点の影響領域 (domain of influence) を考えることで説明できる. 今 $c > 0$ の場合を考えている. 解析解において, 格子点の値は特性曲線 $x - ct = \text{const}$ に沿って伝播する.

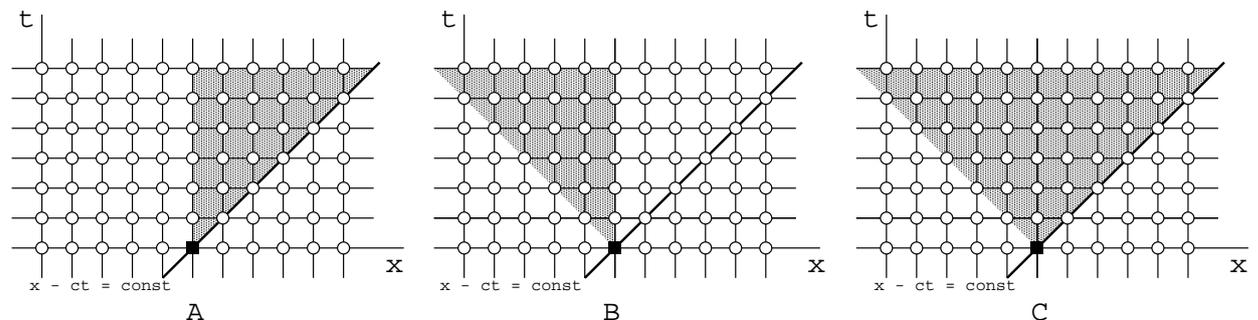


図 4.3.8: 空間差分の違いによる影響領域の模式図. A は上流差分を用いた場合, B は下流差分を用いた場合, C は中心差分を用いた場合である.

図 4.3.8 は上流, 下流, 中心空間差分がそれぞれ影響を与える格子点を模式的に描いた図である. 上流差分 (4.54) をもちいると, 図 A の四角い点は影をつけた領域に影響を与える. 図 B, C は同様に, は下流差分と中心差分についての影響領域をそれぞれ示している. 3 つの場合の影響領域のうち, 上流差分で与えられる影響領域が, 解析解の影響領域を表現している特性曲線の, 最もよい近似となっている.

上流差分スキームを別の方法で求めてみる. $(j\Delta x, (n+1)\Delta t)$ での u の値から, 特性

曲線をたどり1つ前の時間ステップでの u の値 u^* を線形補間によって求め、(4.36) のスキームを構築する. 図 4.3.9 を参照されたい.

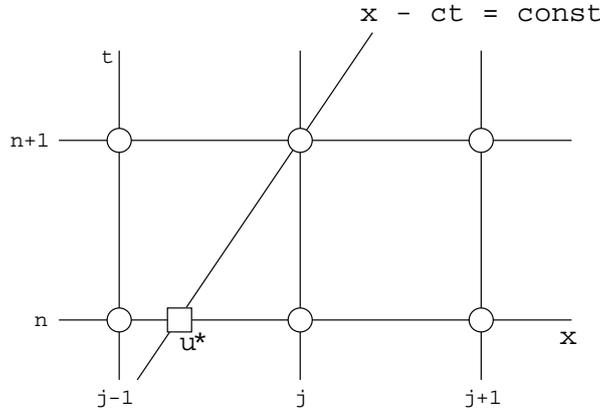


図 4.3.9: 特性曲線の通過する点 $(j\Delta x, (n+1)\Delta t)$ と u^* の関係.

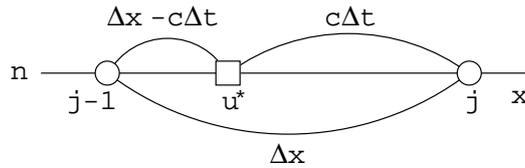


図 4.3.10: 格子点 $((j-1)\Delta x, n\Delta t)$ と $(j\Delta x, n\Delta t)$ の比の関係.

特性曲線上では, u の値は一定であるので $u_j^{n+1} = u^*$ である. 線形補間法を用いて, 時刻 $n\Delta t$ における, x 軸と特性曲線の交点 u^* の値を, u^* に隣接する2つの点で近似する. 線形補間では2つの格子点 $((j-1)\Delta x, n\Delta t)$, $(j\Delta x, n\Delta t)$ の間の u の値の変化量は, 距離に比例するものと近似する. すると,

$$u^* = u_{j-1}^n + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} (\Delta x - c\Delta t)$$

となる. よって,

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} (\Delta x - c\Delta t)$$

を得る. これは上流差分をもちいたスキーム (4.54) に一致する.

(4.52) から得られるスキームの性質をより深く洞察するために, この差分微分方程式の解析解を考察する. (4.52) は小さい Δt に対して, (4.52) に時間差分スキームを適用した差分式から得られる解に近づく. 第2節で導入した無次元時間 $\tau = ct/\Delta x$ をここでも用いると, (4.52) は次のように書き表せる.

$$\frac{d}{d\tau} u_j(\tau) + u_j(\tau) - u_{j-1}(\tau) = 0. \quad (4.55)$$

(4.55) の 1 つの解はポアソンの周波数関数 (Poisson frequency function),

$$u_j(\tau) = \begin{cases} \frac{e^{-\tau} \tau^{j-p}}{(j-p)!} & \text{for } j \geq p, \\ 0 & \text{for } j < p, \end{cases} \quad (4.56)$$

である. これは実際に代入してみれば容易に確認できる. ここで p は任意の整数である. すなわち, $j = 0$ の場所は任意であるという事実をすでに考慮しているということである. ポアソンの周波数関数の例は, 図 4.3.11 に示すとおりである.

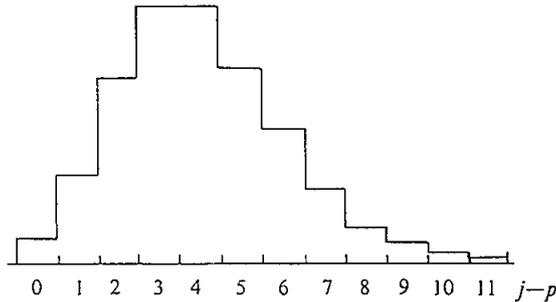


図 4.3.11: $\tau = 4$ のときのポアソンの周波数関数 (4.56).

表中のグラフは $\tau = 4$ の場合である. ポアソンの周波数関数のグラフで囲まれた領域は 1 になるという性質を持っている. すなわち,

$$\sum_{j-p=0}^{\infty} \frac{e^{-\tau} \tau^{j-p}}{(j-p)!} = 1 \quad (4.57)$$

がなりたつ. $\tau = 0$ のとき, グラフは底辺 Δx , 高さ $1/\Delta x$ の長方形になる. 無次元時間 τ がゼロから増加するにつれて, (4.56) の長方形がどう変化するかを追ってみる. x 軸の平均の位置は,

$$\sum_{j-p=0}^{\infty} (j-p) \frac{e^{-\tau} \tau^{j-p}}{(j-p)!} = \tau,$$

であり, 実際の波と同じく一定の速度で移動する. 平均位置は物理的な移流速度と同じ速さで伝播する. しかしながら, 長方形の最大値は, 図 4.3.11 に見られるように, 遅れが生じる.

物理的に適さない u_j の負の値は生じず, 寄生波が物理的な移流方向の反対側に生じることもない. さらに言えば, (4.57) から得られるとおり, 移流量の総量は保存される. しかし, 擾乱の最大値は移流の過程で減衰してしまう.

第2節で見たように, (4.56) のすべての解を線形結合することにより, (4.56) よりもより一般的な解を構成することができる. すなわち,

$$u_j(\tau) = \sum_{p=-\infty}^j a_p \frac{e^{-\tau} \tau^{j-p}}{(j-p)!}. \quad (4.58)$$

a_p は任意の定数である. これに $\tau = 0$ を代入すると,

$$u_j(0) = a_j. \quad (4.59)$$

よって, またも初期条件 $u_j = u_j(0)$ を満たすように任意の a_p を選ぶことができる. また, (4.58) は (4.55) あるいは (4.52) の一般解を表していることになる. (4.56) の簡単な解の振る舞いと, 制限された (4.58) の総和を考察すると, 一般に j における $u_j(\tau)$ の値は j における初期値の効果と, それより上流のすべての点での初期値の重ね合わせによる結果であると考えることができる.

中央差分 (4.49) と, 上流差分 (4.58) の解の例を, やや大きめの空間スケールの初期擾乱,

$$u_j(0) = \begin{cases} 1 & \text{for } j = -1, 0, 1 \\ 0 & \text{for } j \neq -1, 0, 1, \end{cases}$$

を与えて図示すると図 4.3.12 のようになる.

格子点間隔が 300 km のオーダーかつ c が 15 msec^{-1} 程度である場合, 無次元時間 5 単位で, ほぼ物理時間の 1 日に相当することがわかる. よって, 上流差分の減衰効果は極めて深刻な影響を及ぼすように思われる. 図 4.3.12 は 2 つの方法で記述された性質も図示している. しかし, 1 つの格子点に限られた初期擾乱の例より, やや狭い広がりに対して図示している. 以上の理由から, 2 次精度中央差分の代わりに上流差分を用いることが, 一般的に言って数値解の精度を向上させるとは言い難い.

4.4 4次精度中心差分を用いた場合

第4章で議論してきた問題の多く, 特に位相速度の誤差と数値分散は, 空間差分で用いたスキームに起因するものである. 本節では他の可能性に対して考察を加える. そこで, より精度の次数の高い近似を用いることを考える.

近似値 u_j を中心点まわりにテイラー展開し, 次いで差分スキームに代入すると,

$$\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4]. \quad (4.60)$$

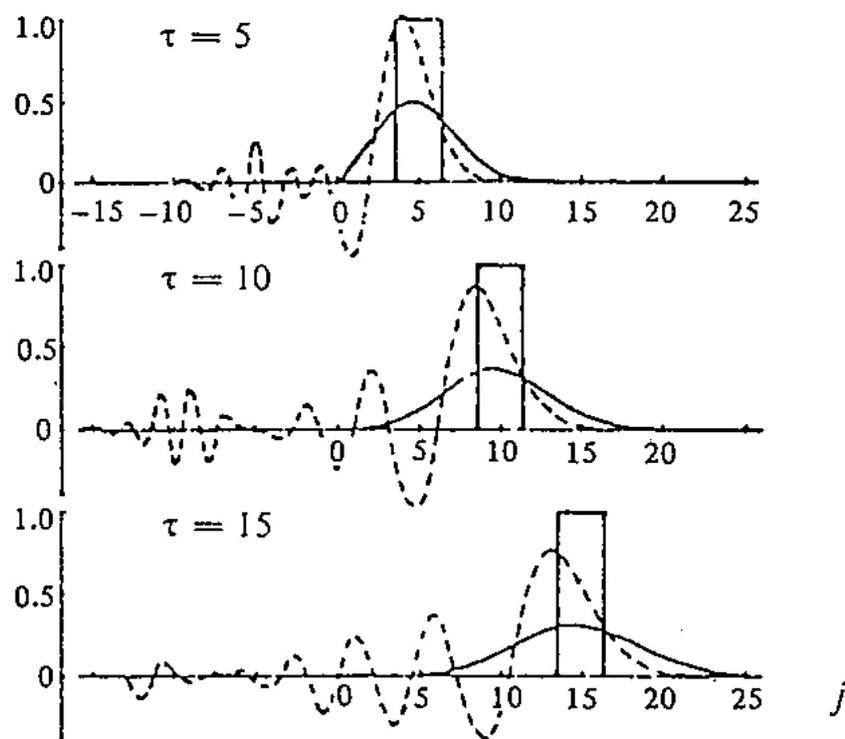


図 4.3.12: 空間差分スキームの違いによる解の振る舞い. 太実線は解析解, 点線は中心差分を用いた場合の数値解, 細実線は上流差分を用いた場合の数値解をそれぞれ表す. 3つの図は上から無次元時間 $\tau = 5, 10, 15$ のときをそれぞれ示している.

よって, この中心差分は空間方向に2次精度をもつ. 同様にして, 差分のとり方を, 着目する点から2つの格子の距離を隔てた値にしてみると, (4.60) の Δx を $2\Delta x$ で置き換えて,

$$\frac{u_{j+2} - u_{j-2}}{4\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O[(\Delta x)^4]. \quad (4.61)$$

(4.61) 右辺の差分はまだ2次精度である. しかし, (4.60) と比較すると, (4.61) の方が係数は大きい. (4.61) の打ち切り誤差に現れる2次のオーダーの項が互いに打ち消しあうことに着目し, $\frac{\partial u}{\partial x}$ の差分を (4.60) と (4.61) の線形結合で構成することを考える. このとき,

$$\frac{4}{3} \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{u_{j+2} - u_{j-2}}{4\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + O[(\Delta x)^4], \quad (4.62)$$

となり, $\frac{\partial u}{\partial x}$ の4次精度の近似を表している.

4次精度中心差分の位相速度

移流方程式の空間微分を (4.62) で差分化した場合の位相速度を調べる. (4.36) の空間微分を (4.62) で置換すると, 差分微分方程式,

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + c \left(\frac{4}{3} \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{u_{j+2} - u_{j-2}}{4\Delta x} \right) = 0, \quad (4.63)$$

を得る. 第2節で見たように解を,

$$u_j(t) = \text{Re}[U(t)e^{ikj\Delta x}],$$

と仮定して振る舞いを調べる. 2次精度空間差分の場合の位相速度は,

$$c_{ph}^* = c \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x},$$

であった. 同様にして4次精度空間差分を用いると, 位相速度,

$$c_{ph}^{**} = c \left(\frac{4}{3} \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{\sin 2k\Delta x}{2k\Delta x} \right), \quad (4.64)$$

を得る.

これら2つの位相速度を比較する. 2次精度差分について, 十分小さい k についてテイラー展開すると,

$$c^* = c \left(1 - \frac{1}{3!} (k\Delta x)^2 + \dots \right).$$

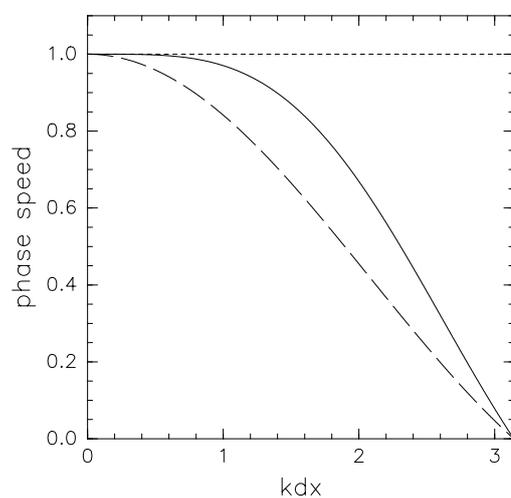


図 4.4.13: 1次元線形移流方程式に4次精度中心差分を用いた場合と、2次精度中心差分を用いた場合の位相速度を示す。点線は連続形での位相速度 $c = c_{ph}$, 破線は2次精度差分の場合の位相速度 c_{ph}^* , 実線は4次精度差分の場合の位相速度 c_{ph}^{**} である。座標のとり方は図 4.2.4 と同様である。

一方、4次精度差分については、

$$c^{**} = c \left(1 - \frac{4}{5!} (k\Delta x)^4 + \dots \right).$$

よって、4次精度中心差分の場合、たとえ位相速度が減速するとしても、位相速度の誤差は十分小さい k については十分に軽減される。

位相速度 c^* , c^{**} を、 $k\Delta x$ の関数として図 4.4.13 に示した。図 4.4.13 から、2次精度中央差分に比べ、4次精度中央差分の方が、位相速度の遅れは小さいことがわかる。とはいえ、波長が最小値 $2\Delta x$ に近づくとつれて、4次精度差分で得られた位相速度はゼロに近づく。さらに、波長の短い波について、位相速度の曲線の傾きは2次精度差分近似の場合よりも大きくなる。そのため、波の数値分散も大きくなる。ゆえに、4次精度中央差分では短い波長の擾乱は、位相速度の遅れを軽減できるが、数値分散による波形の変形が大きくなる。

より高い次数の精度をもつスキームをつくるために、スキームにより多くの格子点を使うことは、別の観点から難点がある。2段階以上の時間差分を用いると計算モードが生じてしまった。同様に、空間差分により多くの格子点を用いると、時間差分での考察と同様にして、空間にも計算モードが生じてしまう。もっといえば、境界条件の設定が複雑になってしまう。簡単な境界条件の設定が、深刻な問題となる。

第5章 1次元移流方程式の数値解の振る舞い

第4章までの内容を踏まえ、本章では実際に1次元移流方程式のFORTRANプログラムを作成し、解の振る舞いを考察する。

5.1 スキームの構築と初期条件

関数 $u(x, t)$ を考えると、1次元線形移流方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad c = \text{const} \quad (5.1)$$

と表される。時間方向に前進差分を、空間方向に中央差分を用いて(5.1)を差分化すると、

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (5.2)$$

となる。(5.2)が解くべき差分方程式である。空間の範囲を $0 \leq x \leq 10$ とし、初期条件を、

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \text{ のとき} \end{cases} \quad (5.3)$$

と設定する。以下では差分方程式(5.2)に初期条件(5.3)を与えたとき、パラメータ $\Delta x, \Delta t$ の変化によって解がどのように振る舞うのかを観察し、その原因を考察する。

5.2 計算実験

計算 1

以下の条件で解 (5.2) の振る舞いを観察する.

移流速度 c	格子分割数 n	Δx	Δt	クーラン数 ^a	境界条件
10	20	0.5	0.01	0.2	$u_1 = u_{n+1}$

^aクーラン数 μ とは, $\mu = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$ で定義される定数である. 安定性の議論から $\mu \leq 1$ が必要である.

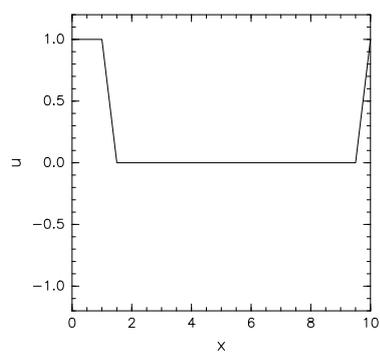
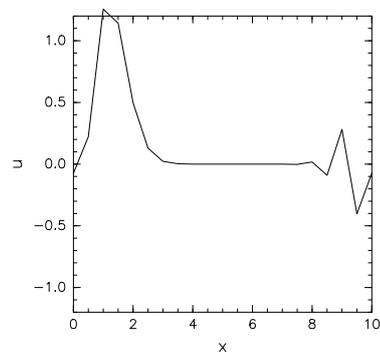
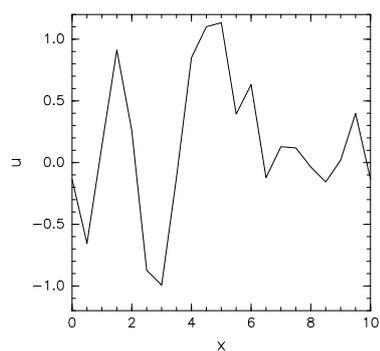
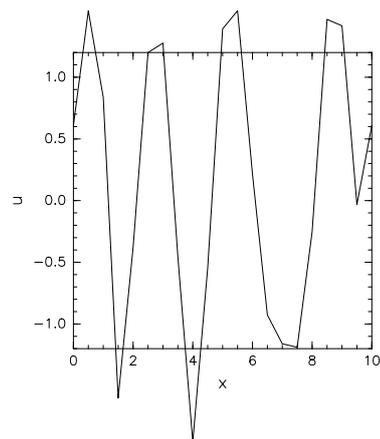
解析解であれば, $t = 0$ での波形が維持されたまま x 軸正方向に波が伝播するはずである. しかし, 計算結果を見ると 10 ステップの時点ですでに波形は乱れ, 進行方向と反対の方向に寄生波が生じているのがわかる¹⁾. 寄生波もまた時間ステップとともに増加する. 50 ステップ計算をすると, 解の乱れが顕著になるが, 辛うじて $x = 5$ に u を見出すことができる. 100 ステップ経つと, 初期の矩形を観察することができないほどに解は振動してしまっていることが分かる.

(5.2) の増幅係数は,

$$|\lambda| = \sqrt{1 + \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x) \right)^2} \quad (5.4)$$

であるから, 時間とともに (5.2) の解は増幅していくことがわかる. 矩形波にはフーリエ展開したときに高波長成分が多くあらわれるため, 寄生波の影響も大きと考えられる.

¹⁾今, 周期境界条件を仮定しているので, $x = 10$ の付近に見られるのが寄生波である.

図 5.2.1: 初期状態 $t = 0$ (0 step)図 5.2.2: $t = 0.1$ (10 step) のときの (5.2) の解図 5.2.3: $t = 0.5$ (50 step) のときの (5.2) の解図 5.2.4: $t = 1.0$ (100 step) のときの (5.2) の解

初期値を $u(x, 0) = \sin x$ とし, 計算 1 と同じ条件で計算すると, (5.2) の解の振る舞いは図 5.2.5 ~ 5.2.8 のようになる. ただし, 空間の範囲は $0 \leq x \leq 2\pi$ としている. $u(x, 0) = \sin x$ とした場合は, 初期の関数に高波長成分を含まないため, 寄生波は生じない. しかしながら時間とともに解が増幅していることは確かめられる.

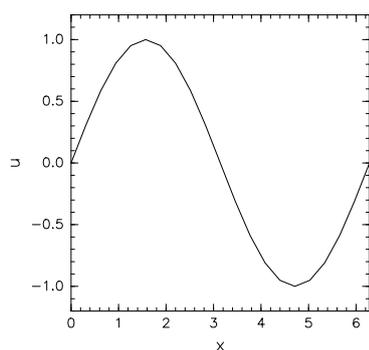
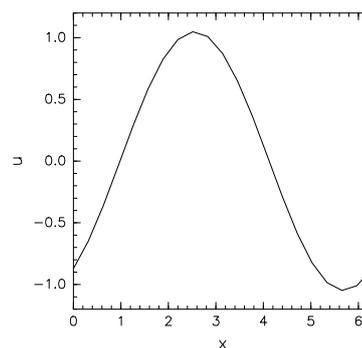
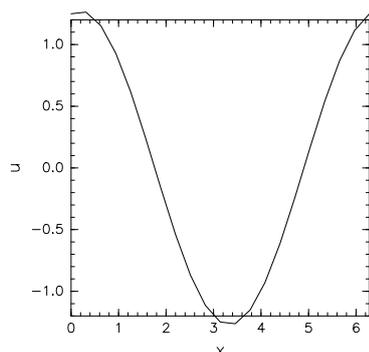
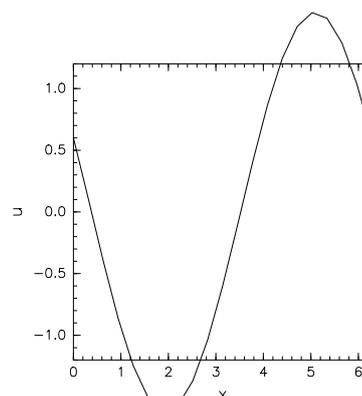


図 5.2.5: 初期状態

図 5.2.6: $t = 0.1$ (10 step) のときの (5.2) の解図 5.2.7: $t = 0.5$ (50 step) のときの (5.2) の解図 5.2.8: $t = 1.0$ (100 step) のときの (5.2) の解

(5.2) の解を, 解析解に近づけることを考える. 寄生波に関しては初期値に依存するので, 本論文では考察しない. 増幅係数 (5.4) の式の形から, $c \frac{\Delta t}{\Delta x}$ の値を小さくすれ

ば, (5.2) の解を解析解に近づけられそうである. スキームの性質を調べたいので, ここでは物理的な移流速度 c を変化させることはせず, $\Delta x, \Delta t$ の値を変化させたときに, 数値解がどのように振る舞うかを実験してみる.

— 計算 2 —

$\Delta x, \Delta t$ を計算 1 より小さくとり, (5.2) の振る舞いを観察する.

移流速度 c	格子分割数 n	Δx	Δt	クーラン数	境界条件
10	120	0.0833...	1.0×10^{-7}	1.2×10^{-5}	$u_1 = u_{n+1}$

$c \frac{\Delta t}{\Delta x}$ の値が小さいので, 増幅係数の大きさは $|\lambda| \approx 1$ と考えてよい. 結果は図 5.2.9, 5.2.10 のようになる.

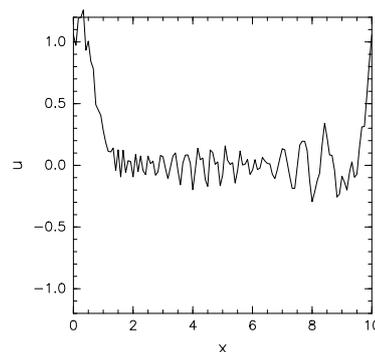
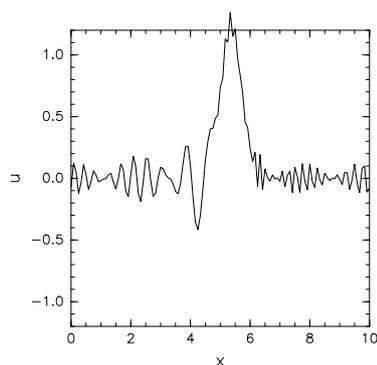


図 5.2.9: 計算 2 において, $t=0.5$ のときの (5.2) の解

図 5.2.10: 計算 2 において $t=1.0$ のときの (5.2) の解

次に, クーラン数は変えずに, $\Delta x, \Delta t$ の値を変えて計算してみる. 計算 2 に比べて $\Delta x, \Delta t$ を小さくしてみる.

計算 3

クーラン数の値は変化させずに、計算 2 よりも Δx , Δt を小さくって計算を行い、(5.2) の振る舞いを観察する。

移流速度 c	格子分割数 n	Δx	Δt	クーラン数	境界条件
10	1200	0.00833...	1.0×10^{-8}	1.2×10^{-5}	$u_1 = u_{n+1}$

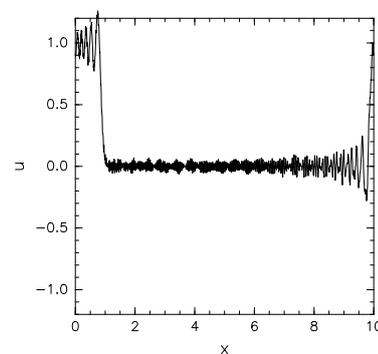
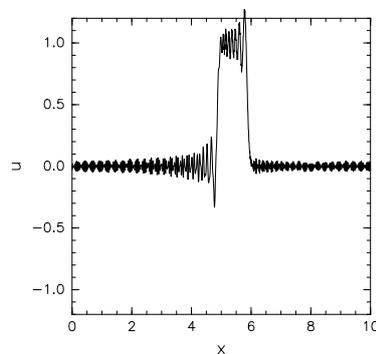


図 5.2.11: 計算 3 において、 $t = 0.5$ のときの (5.2) の解

図 5.2.12: 計算 3 において $t = 1.0$ のときの (5.2) の解

計算 3 の設定では、計算 2 よりも初期の矩形を保ったまま移流していることがわかる。 Δx , Δt の値をさらに小さくし、実験 4 を行った。

計算 4

クーラン数の値は変化させずに、計算 3 よりも Δx , Δt を小さくって計算を行い、(5.2) の振る舞いを観察する。

移流速度 c	格子分割数 n	Δx	Δt	クーラン数
10	12000	0.000833...	1.0×10^{-9}	1.2×10^{-5}

計算 4 では計算 3 に比べ、波形がよりはっきりと認識できる。しかし、計算 4 は計算に約 10 時間要した。図 5.2.13 と図 5.2.16 を見比べると、位相が遅れていることも読み取ることができる。

以上の計算から、確かにオイラー法は不安定であることを確かめられた。

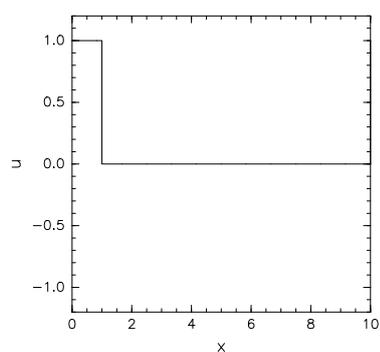
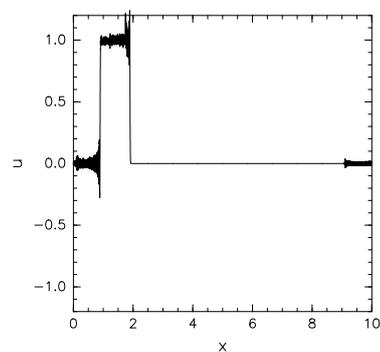
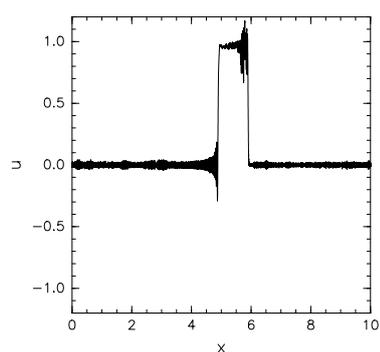
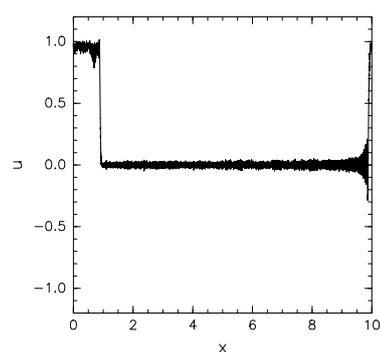


図 5.2.13: 計算 4 初期状態

図 5.2.14: 計算 4 において $t = 0.1$ のときの (5.2) の解図 5.2.15: 計算 4 において, $t = 0.5$ のとき図 5.2.16: 計算 4 において $t = 1.0$ のときの (5.2) の解

第6章 まとめ

関数 $u = u(x, t)$ を考えたとき, 1次元線形移流方程式,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

を解く問題は, 振動方程式,

$$\frac{dU}{dt} = i\omega U$$

を解く問題に帰着される. 振動方程式に対し時間差分スキームを適用したときの安定性は以下の表のようになる.

反復しない2段階スキーム

$$U^{n+1} = U^n + ip(\alpha U^n + \beta U^{n+1}), \quad p = \omega \Delta t.$$

スキーム名	(α, β)	$ \lambda $	位相比 (θ/p)	安定性
前進差分 (オイラー 法)	(1,0)	$ \lambda = \sqrt{1+p^2}$	$\frac{\theta}{p} = \frac{1}{p} \arctan p < 1$	常に不安定. 位相は遅れる.
後退差分ス キーム	(0,1)	$ \lambda = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$	$\frac{\theta}{p} = \frac{1}{p} \arctan p < 1$	陰的スキーム. Δt の大きさに依らず安定. ω が大きい数値解ほど減衰率が大きい.
台形スキ ーム	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$ \lambda = 1$	$\frac{\theta}{p} = \frac{1}{p} \arctan \frac{p}{1 - \frac{1}{4}p^2}$	陰的スキーム. Δt の大きさに依らず安定. 位相は p がゼロの付近では遅れる. p が増加するにつれて速くなる.

反復する2段階スキーム

$$U^{n+1} = (1 - \beta p^2 + ip)U^n.$$

スキーム名	β	$ \lambda $	位相比 (θ/p)	安定性
松野スキーム	1	$ \lambda = \sqrt{1 - p^2 + p^4}$	$\frac{\theta}{p} = \frac{1}{p} \arctan \frac{p}{1 - p^2}$	$ p \leq 1$ で安定. 位相の振る舞いは台形スキームに同じ.
ホインスキーム	$\frac{1}{2}$	$ \lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}p^4}}$	$\frac{\theta}{p} = \frac{1}{p} \arctan \frac{p}{1 - \frac{1}{2}p^2}$	常に不安定. 位相の振る舞いは台形スキームに同じ.

3段階スキーム

リープフロッグスキーム		
$U^{n+1} = U^{n-1} + i2pU^n$		
	物理モード	計算モード
増幅係数	$\lambda_1 = \sqrt{1 - p^2} + ip$	$\lambda_2 = -\sqrt{1 - p^2} + ip$
$\Delta t \rightarrow 0$	$\lambda_1 \rightarrow 1$	$\lambda_2 \rightarrow -1$
$ p < 1$ のとき	$ \lambda_1 = 1$	$ \lambda_2 = 1$
	$\theta_1 = \arctan \frac{p}{\sqrt{1 - p^2}}$	$\theta_2 = \arctan -\frac{p}{\sqrt{1 - p^2}}$
$p > 0$	$0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \pi$
$p < 0$	$-\frac{\pi}{2} < \theta_1 < 0$	$-\pi < \theta_2 < -\frac{\pi}{2}$
$p \rightarrow 0$	$\theta_1 \rightarrow p$	$\theta_2 \rightarrow \pm\pi - p$
$ p = 1$ のとき	$ \lambda_1 = 1$	$ \lambda_2 = 1$
$p = \pm 1$	$\theta_1 = \pm\frac{\pi}{2}$	$\theta_2 = \pm\frac{\pi}{2}$
$ p > 1$ のとき	$ \lambda_1 = p + \sqrt{p^2 - 1} $	$ \lambda_2 = p - \sqrt{p^2 - 1} $
	$ \lambda_1 > 1, (p > 1)$	$ \lambda_2 > 1, (p < -1)$
	$\theta_1 = \pm\frac{\pi}{2}$	$\theta_2 = \pm\frac{\pi}{2}$
安定性	$ p \leq 1$ で安定. ただし, 計算モードも安定する.	

アダムス-バッシュフォーススキーム		
$U^{n+1} = U^n + ip \left(\frac{3}{2}U^n - \frac{1}{2}U^{n-1} \right)$		
	物理モード	計算モード
増幅係数	$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(1 + i\frac{3}{2}p + \sqrt{1 - \frac{9}{4}p^2 + ip} \right)$	$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(1 + i\frac{3}{2}p - \sqrt{1 - \frac{9}{4}p^2 + ip} \right)$
$\Delta t \rightarrow 0$	$\lambda_1 \rightarrow 1$	$\lambda_2 \rightarrow 0$
$ \lambda $	$ \lambda_1 = 1 + \frac{1}{4}p^4 + \dots > 1$	$ \lambda_2 = \frac{1}{2}p + \dots$
安定性	常に不安定. ただし, 計算モードの増幅係数が十分小さいので, Δt が十分小さい範囲では有効.	

空間差分

種類	長所	短所
上流差分	高周波成分を含む関数を初期値に与えても, 寄生波が生じない. 影響 (依存) 領域が特性曲線を含んでいる. さらに, 中心差分に比べて余分な影響領域がない.	短波長成分ほど増幅係数が小さくなる.
下流差分		影響領域が特性曲線を含んでいない. 1次元線形移流方程式には不適切.
中心差分	影響領域が特性曲線を含んでいる.	寄生波が生じる. 影響領域が不要な領域も含んでいる.

実際に空間方向に中心差分, 時間方向に前進差分を用いて1次元線形移流方程式を数値計算した結果, フォンノイマン安定性解析による不安定性, 寄生波の存在を確認することができた.

付録

図 5.2.1 ~ 5.2.4 を記述したプログラムを掲載する. 描画には「地球流体電脳ライブラリ (DCL)」を用いている.

```

1  ! 1次元移流方程式
2  ! 時間積分: オイラー法
3  ! 空間積分: 中心差分法
4  ! 周期境界条件
5  program main
6  implicit none
7  ! --- 変数の宣言 ---
8  integer , parameter :: nmax = 20           ! 格子分割数
9  real(4)   , parameter :: xmax = 10.0e0     ! 空間領域 0 <= x <= 10
10 real(4)   :: dx                           ! 空間格子間隔
11 real(4)   :: dt =0.010e0                  ! 時間間隔
12 real(4)   :: cs = 10.0e0                   ! 速度
13 real(4) , allocatable :: u_a(:)           ! (n+1)\Delta t
14 real(4) , allocatable :: u_b(:)           ! n\Delta t
15 real(4) , allocatable :: x_x(:)           ! 座標
16 integer :: it, ix, ins                     ! do ループ作業用
変数他
17 integer :: nt                               ! 時間ステップ数
18 ! --- 初期条件 ---
19 dx = xmax / real(nmax)                     ! 格子間隔を定義
20 allocate ( u_a(1:nmax+1), u_b(1:nmax+1), x_x(1:nmax+1) ) ! 配
列の定義

```

```
21  ! --- 変数初期化 ---
22  do ix=1, nmax+1
23      u_a(ix) = 0.0e0
24      u_b(ix) = 0.0e0
25      x_x(ix) = 0.0e0
26  enddo
27  ! --- 座標設定 ---
28  do ix=1, nmax+1
29      x_x(ix) = (ix - 1) * dx
30  enddo
31  ! --- 初期値の設定 ---
32  do ix=1, nmax+1
33      if (x_x(ix) <= 1.0e0) then      ! 0 <= x <=1 のとき u = 1
34          u_b(ix) = 1.0e0
35      else
36          u_b(ix) = 0.0e0            ! それ以外のとき u = 0
37      endif
38  enddo
39  ! --- 周期境界条件 ---
40  u_b(nmax+1) = u_b(1)
41  ! --- 描画サブルーチン呼び出し ---
42  ! 描画には DCL を用いる
43  WRITE(*,*) ' WORKSTATION ID (I) ? ;'
44  !   call sgpwsn
45  !   read (*,*) ins
46  !   call gropn( ins )
47  CALL GROPN( 2 )
48  call grfrm
49  call grswnd( 0.0e0, 10.0e0, -1.20e0, 1.20e0 )
50  call grsvpt(0.2, 0.8, 0.2, 0.8)
51  call grstrf
52  call ussttl('x', ' ', 'u', ' ')
```

```
53      call usdaxs
54      call sgplzu(nmax+1, x_x, u_b, 1, 1)
55      ! 時間ステップ数を入力
56      !write(*,*),'time step input =>'
57      !read(*,*) nt
58      nt = 100
59      ! --- 時間積分開始 ---
60      do it=1, nt
61          u_a(1) = u_b(1) - cs * dt * (u_b(2) - u_b(nmax)) * 0.50e0 / dx
62          do ix=2, nmax
63              u_a(ix) = u_b(ix) - cs * dt * (u_b(ix+1) - u_b(ix-1)) * 0.50e0 /
64          enddo
65          u_a(nmax+1) = u_b(nmax+1) - cs * dt * (u_b(2) - u_b(nmax)) * 0.50e0
66          u_b=u_a
67      ! 図を描く
68      call grfrm
69      call grswnd( 0.0e0, 10.0e0, -1.20e0, 1.20e0 )
70      call grsvpt(0.2, 0.8, 0.2, 0.8)
71      call grstrf
72      call ussttl('x', ' ', 'u', ' ')
73      call usdaxs
74      call sgplzu(nmax+1, x_x, u_b, 1, 1)
75      enddo
76      ! 描画終了
77      call grcls
78      end program main
```

謝辞

本論文を作成するにあたり, 指導教官の石渡正樹准教授, 小高正嗣助教, 杉山耕一郎助教には, 研究テーマ選定から文章の校正まで, 熱心かつ丁寧なご指導を賜りました. 博士課程の山下達也, 修士課程の馬場健聡の両氏には, 忙しい中論文の校正, 的確なご指摘を多くいただきました. その他, 惑星宇宙グループの皆様にも多くの助言や励ましの言葉をいただきました. また, 作図には地球流体電脳ライブラリを使用させていただきました. 皆様のご厚意に深く感謝致します.

参考文献

F. Mesinger, A. Arakawa, 1976 : Numerical methods used in atmospheric models. GARP PUBLICATIONS SERIES, 17, 1 – 34

Pijush K. Kundu, Ira M. Cohen, 2008 : Fluid Mechanics. ACADEMIC PRESS, 239 – 240

石岡圭一, 2004 : スペクトル法による数値計算入門, 東京大学出版, 232pp

河村哲也, 2006 : Computer Science Library 17 数値計算入門, サイエンス社, 165 pp

河村哲也, 2006 : Computer Science Library 18 数値シミュレーション入門, サイエンス社, 197 pp

伊理正夫, 藤野和建, 1985 : 数値計算の常識, 共立出版株式会社, 174 pp

増田善信, 1981 : 気象学のプロムナード 3 数値予報 - その理論と実際 -, 東京堂出版, 113 – 130

藤井孝藏, 1994 : 流体力学の数値計算法, 東京大学出版会, 234 pp

Chun Wa Wong, 小林てつ郎, 近匡共訳, 1996 : 物理数学入門 1 線形代数とフーリエ級数, 丸善株式会社, 162 – 184

Stanley J. Farlow, 伊理正夫, 伊理由美訳 : 偏微分方程式 科学者・技術者のための使い方と解き方, 朝倉書店, 411 pp