

1.2 物理モードと計算モードについて

物理モードを U_1 , 計算モードを U_2 とする. それぞれのモードに対する増幅係数を λ_1, λ_2 とする. n ステップ目の数値解 $U_1^{(n)}, U_2^{(n)}$ はそれぞれ,

$$\begin{aligned} U_1^{(n)} &= \lambda_1^n U_1^{(0)}, \\ U_2^{(n)} &= \lambda_2^n U_2^{(0)} \end{aligned}$$

となる. ここで, $U_1^{(0)}, U_2^{(0)}$ は初期値. λ_1, λ_2 は (9.2.19) 式から,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{1 - p^2} + ip, \\ \lambda_2 &= -\sqrt{1 - p^2} + ip \end{aligned}$$

となる. $|p| < 1$ の場合を考えると $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ より,

$$\lambda_1 = e^{i\theta}. \quad (10.1.11)$$

このときの位相は,

$$\theta = \arctan \frac{p}{\sqrt{1 - p^2}}$$

になる. $p > 0, p < 0$ の両方の場合を考えると,

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= e^{i(\pm\pi - \theta)} \\ &= -e^{-i\theta} \end{aligned} \quad (10.1.12)$$

となる¹⁾.

数値解 u_j^n は,

$$u_j^n = \sum_k u_k^{(n\Delta t)} e^{-ik(j\Delta t)} \quad (10.1.13)$$

と表せる. 解が物理モードのみで構成されたとすると,

$$\begin{aligned} u_j^n &= \operatorname{Re} \left[\sum_k U_{1,k}^{(n)} e^{-ik(j\Delta x)} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\sum_k U_{1,k}^{(0)} \lambda_1^{(n)} e^{-ik(j\Delta x)} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\sum_k U_{1,k}^{(0)} e^{-ik(j\Delta x - \frac{n\theta}{k})} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\sum_k U_{1,k}^{(0)} e^{-ik(j\Delta x - \frac{\theta}{k\Delta t} n\Delta t)} \right]. \end{aligned} \quad (10.1.14)$$

¹⁾詳しくは第9章 偏微分方程式の数値解法の基礎2 (Mesinger and Arakawa, 1976: Chapt2) の2.3 三段階スキームの p17-20 を参照されたい.

解が計算モードのみで構成されるとしても同様に

$$\begin{aligned}
 u_j^n &= \operatorname{Re} \left[\sum_k U_{2,k}^{(n)} e^{-ik(j\Delta x)} \right] \\
 &= \operatorname{Re} \left[\sum_k U_{2,k}^{(0)} \lambda_2^{(n)} e^{-ik(j\Delta x)} \right] \\
 &= \operatorname{Re} \left[\sum_k (-1)^n U_{2,k}^{(0)} e^{-ik(j\Delta x + \frac{\theta}{k\Delta t} n\Delta t)} \right]. \tag{10.1.15}
 \end{aligned}$$

(10.1.14) 式, (10.1.15) 式を解析解のフーリエ表現

$$u(x, t) = \operatorname{Re} \left[\sum_k U_k^{(0)} e^{-ik(x-ct)} \right]$$

と比べると, 物理モードの位相速度 c_1 は,

$$c_1 = -\frac{\theta}{k\Delta t}.$$

計算モードの位相速度 c_2 は,

$$c_2 = \frac{\theta}{k\Delta t}$$

となる. ここで $\Delta t \rightarrow 0$ の極限では, $p = -c \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin k\Delta x$ より, $\theta \rightarrow p$ となり²⁾, さらに, $\Delta x \rightarrow 0$ の極限を考えると,

$$\begin{aligned}
 c_1 &= -\frac{\theta}{k\Delta t} \\
 &\sim -\frac{p}{k\Delta t} \\
 &= \frac{c}{k\Delta x} \sin k\Delta x \\
 &\sim c
 \end{aligned}$$

²⁾ $\Delta t \rightarrow 0$ の極限では,

$$\begin{aligned}
 p &= -c \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin k\Delta x \\
 &\sim 0
 \end{aligned}$$

となって,

$$\begin{aligned}
 \theta &= \arctan \left(\frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \right) \\
 &\sim \arctan \left(p - \frac{1}{2}p^3 \right) \\
 &\sim p
 \end{aligned}$$

となる.

となる. 同様に求めると, $c_2 = -c$.

よって, 物理モードの位相速度は $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$ のとき, c に一致し, 計算モードの位相速度は $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$ のとき, $-c$ となる. 更に (10.1.15) 式で $(-1)^n$ がかかっているため, 計算モードは 1 ステップごとに符号を変える.