

地球惑星状態物理学II
地球惑星大気物理学入門

倉本 圭

2006年4月

0. はじめに

0-1 本講義の対象

地球および惑星の流体圏 大気・海・核

関連する物質圏・天体 固体圏, 太陽, 衛星, 惑星間空間, 原始太陽系星雲…

0-2 “状態”の意味

前提条件 巨視的な系…非常に多数の原子分子の平均的な量

狭義の状態 温度, 圧力, 密度, 組成, 電磁場 (熱物理学的な定義)

広義の状態 + 物質分布・運動・エネルギー収支等

0-3 講義内容

第1週 序論

第2週 地球惑星の大気, 表面温度, 有効温度, 温室効果

第3週 構成物質の物理状態

第4週 静水圧平衡, スケールハイト, 大気-惑星間空間境界, 大気の熱的安定性

第5週 鉛直温度構造, 断熱変化, 放射平衡

第6週 放射対流平衡

第7週 試験

1 序論

1-1 惑星とは

- 1) 恒星の周りを公転
- 2) 自ら輝いていない
- 3) 中心星より平均組成が重元素に富む
- 4) そこそこ大きい

宇宙元素存在度 太陽大気の組成. 近似的に現在の宇宙全体の組成を表す.

宇宙元素存在度 (抜粋)	
元素	存在度 (個数比)
H	2.79×10^{10}
He	2.72×10^9
C	1.01×10^7
N	3.13×10^6
O	2.38×10^7
Ne	3.44×10^6
Mg	1.076×10^6
Si	$\equiv 1 \times 10^6$
S	5.15×10^5
Ar	1.01×10^5
Fe	9.00×10^5

1-2 太陽系内の惑星

地球型 岩石と金属が主成分…水星・金星・地球・火星

太陽系の内側に位置. 質量小. 衛星を持たない or 持っても小数.

木星型 ガスが主成分…木星・土星

外側に位置. 質量大. H, He に富む外層. 多数の衛星.

木星・土星: 内部まで H, He に富む.

天王星・海王星: 内部は H_2O , CH_4 , NH_3 に富む (→天王星・海王星型)

冥王星 軌道いびつ. 質量小. 惑星と小惑星の中間的存在.

大気・衛星を持つ.

地球の全体構造 中心部に重元素が沈んでいる.

地球の構造

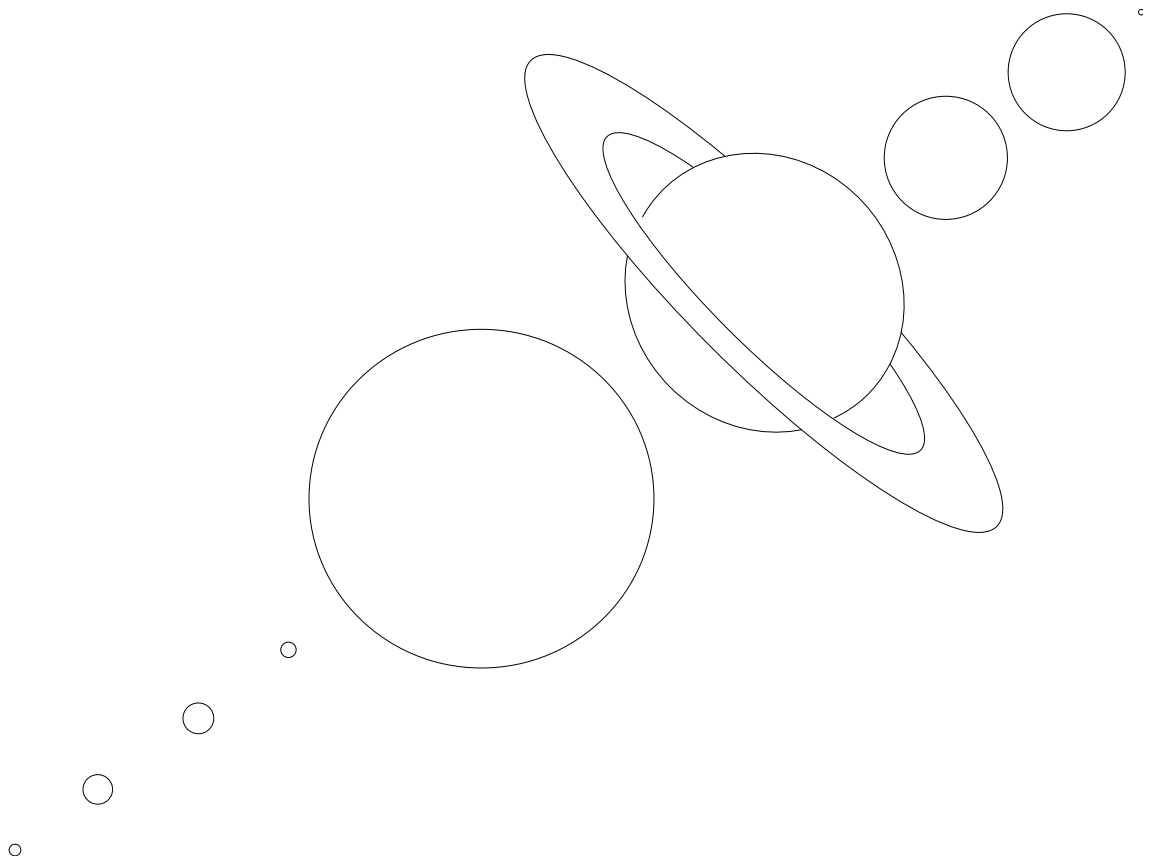
(半径 km)	主要成分	状態	化学結合の主形態
内核 (1221.5)	Fe	固体	金属結合
外核 (3480.0)	Fe	液体	金属結合
マントル (6350)	Mg,Si,O	固体	イオン結合
地殻 (6371)	Si,Al,Ca,O	固体	イオン結合
海洋 (6371)	H,O	液体	水素結合
大気 (>6371)	N,O	気体	共有結合

太陽系の惑星

天体名	軌道長半径 (a)	公転周期	自転周期	赤道傾斜角
水星	0.3871 AU	88.0 day	58.65 day	<28°
金星	0.7233	224.7	243.01	177°.3
地球	1.0000	365.26 day	23 ^h 56 ^m 4 ^s	23°.44
火星	1.5237	687	24 ^h 37 ^m 23 ^s	25°.19
木星	5.2026	11.862 yr	9 ^h 50 ^m 30 ^s	3°.1
土星	9.5549	29.458	10 ^h 14 ^m	26°.7
天王星	19.2184	84.022	17 ^h 17 ^m	97°.9
海王星	30.1104	164.774	18 ^h 20 ^m	29°.6
冥王星	39.5399	248.534	6 ^h 9 ^m	118°

太陽, 惑星, 月の性質

天体名	質量 (M)	赤道半径 (R)	平均密度 (ρ)	表面重力 (g)	脱出速度 (v_e)
太陽	332946	696000 km	1.41 g/cm ³	28.01	617.5 km/s
水星	0.055	2439	5.43	0.38	4.25
金星	0.815	6052	5.24	0.91	10.36
地球	≡1	6378	5.52	≡1	11.18
火星	0.107	3397	3.93	0.38	5.02
木星	317.832	71398	1.33	2.37	59.57
土星	95.16	60000	0.70	0.95	35.36
天王星	14.50	25400	1.30	0.89	21.33
海王星	17.22	24300	1.76	1.19	23.77
冥王星	0.0021	1137	2.1	0.067	0.58
月	0.0123	1738	3.34	0.17	2.38



2. 惑星大気

2-1 組成

木星型惑星：元素組成 ~ 太陽大気. H は H_2 分子として存在. 極めて厚い.

地球型惑星：元素組成 \neq 太陽大気. 重元素に富む.

金星・火星： CO_2 が主成分. 金星は厚く, 火星は薄い.

地球： N_2 , O_2 が主成分. 地表に大量の液体の H_2O .

2-2 温度

ステファンボルツマンの法則

温度 T の黒体が単位時間単位表面積あたりに放射するエネルギー = σT^4

ここで σ はステファンボルツマン定数

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

平衡温度 T_{eq} 惑星の吸収した太陽放射に等価な黒体温度

$$4\pi R^2 \sigma T_{eq}^4 = \pi R^2 (1 - A) F$$

ここで, R は惑星半径, A はアルベド, F は惑星軌道における太陽放射フラックス. 1AU では

$$F = 1370 \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2}$$

この値を**太陽定数**と呼ぶ.

有効温度 T_{eff} 惑星の総熱放射に等価な黒体温度

$$4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4 = [\text{惑星の総熱放射}]$$

金星： $T_s \gg T_{eq}, T_{eff}$ CO_2 の強い温室効果.

木星： $T_{eff} > T_{eq}$ 内部にも熱源.

地球： $T_s > T_{eq}, T_{eff}$ H_2O , CO_2 の温室効果.

太陽と代表的な惑星の大気

	太陽	地球	金星	火星	木星
表面気圧 $P(\text{bar})$	0.13 (光球面)	1.013	92	0.006	2 (雲頂)
表面温度 $T_s(\text{K})$	6430 (光球面)	280	750	240	134 (雲頂)
有効温度 (K) T_{eff}	5780	250	230	220	130
平衡温度 (K) T_{eq}	—	256	227	216	98
主要大気成分 (vol%)	H (91.0)	N ₂ (78)	CO ₂ (96.5)	CO ₂ (95.3)	H ₂ (88.8)
	He (8.9)	O ₂ (21)	N ₂ (3.5)	N ₂ (2.7)	He (11.1)
	O(78ppm)	Ar (0.9)	Ar (70 ppm)	Ar (1.6)	CH ₄ (0.2)

2-3 惑星に大気が存在するための条件

直観的に…小さな惑星は大気を持ってない

大気が存在する必要条件：分子の熱運動エネルギー < 重力エネルギー

$$\frac{3}{2}kT < G\frac{Mm}{R}$$

ここで k はボルツマン定数, G は万有引力定数, M は惑星質量, m は分子質量.

$$k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K.}$$

これを脱出速度 v_e を用いて変形

$$\frac{1}{2}v_e^2 = G\frac{M}{R}$$

だから

$$\frac{3}{2}kT < \frac{1}{2}mv_e^2$$

問題

問題 1 太陽定数, 太陽の半径, 太陽-地球間の距離から, 太陽の有効放射温度を求めよ.

問題 2 (1) 地球は大気を持つ条件を満たしていることを確かめよ. (2) 月に大気が存在しない理由について考察せよ.

3. 構成物質とその状態

3-1 流体圏の構成物質

地球の全体構造 中心部に重元素が沈んでいる。

(半径 km)	主要成分	状態	化学結合の主形態
内核 (1221.5)	Fe	固体	金属結合
外核 (3480.0)	Fe	液体	金属結合
マントル (6350)	Mg, Si, O	固体	イオン結合
地殻 (6371)	Si, Al, Ca, O	固体	イオン結合
海洋 (6371)	H, O	液体	水素結合
大気 (>6371)	N, O	気体	共有結合

大気圏 上空へゆくにつれて

分子→原子→イオン+電子

へと変化

解離エネルギー 水素原子のイオン化ポテンシャル = 13.6 eV

エネルギーの換算 $1\text{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\text{J} = 1.727 \times 10^4\text{ K}$

3-2 熱力学平衡の仮定

熱平衡状態 孤立系において十分長時間経過したのちに実現される状態→平均量で記述 P, T, \dots

局所熱力学平衡 現実の系：物質的にもエネルギー的にも開放系。しかも不均一。

部分部分を熱平衡状態と近似：これを局所熱力学平衡の仮定という。

近似の良さ→速度論。

地球惑星物質の状態を知るには 平衡状態の物理：

プラズマ (電離気体)

↓↑

原子

↓↑

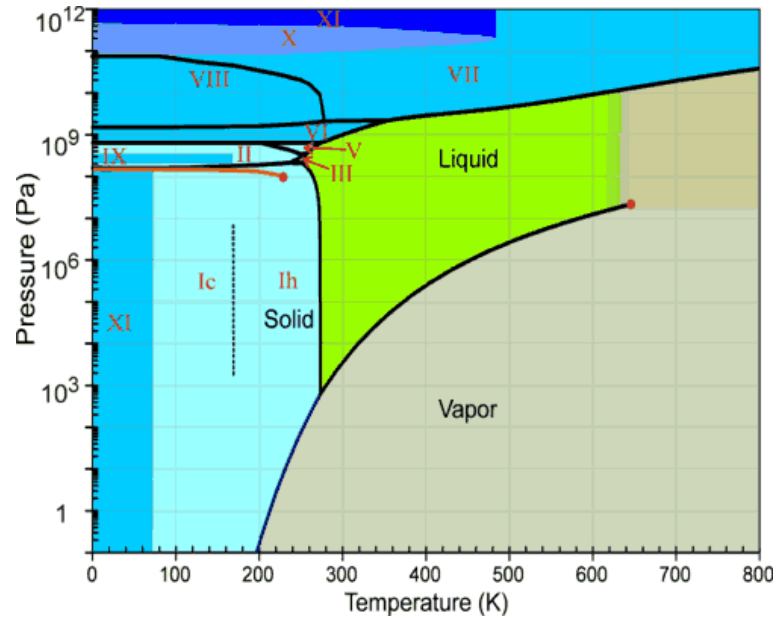
分子

↓↑

凝縮相 (液体・固体)

以下では分子と凝縮相の間の変化を取り上げて考察。

相図 物質が各温度圧力における熱平衡状態においてとる相を図に表したもの。以下にあげるのはH₂Oの相図。



- 相境界：文字通り相と相の境界
- 共存曲線，相平衡曲線：2相が共存している相境界を表す曲線
- 蒸気圧曲線：液相または固相と気相との共存曲線
- 3重点：3つの相が共存する点
- 臨界点：それ以上の温度圧力下では気相と液相間の区別がつかなくなる点

3-3 気液平衡

蒸気圧平衡 気液，固気平衡。これは地球においては水と水蒸気の相互変化の記述の基礎。

n モルの物質Aからなる系を考える。Aは気相(g)または液相(l)，ないしは両相の共存状態を取るものとする。

P, T が与えられた閉じた系の平衡条件は，ギブス自由エネルギー最小の条件から求まる。

$$G(P, T, n_g, n_l) = \min. \quad (3.1)$$

n_g, n_l は気相, 液相のモル数を表す. ここで

$$\begin{aligned} G &= n_g \mu_g(P, T) + n_l \mu_l(P, T) \\ &= (n - n_l) \mu_g(P, T) + n_l \mu_l(P, T) \\ &= n \mu_g(P, T) - n_l \{ \mu_g(P, T) - \mu_l(P, T) \} \end{aligned}$$

したがって G 最小の条件は

$$\begin{aligned} \text{全て気相 } (n_g = n, n_l = 0) & \quad \mu_g < \mu_l \text{ の } P, T \text{ 条件の場合} \\ \text{全て液相 } (n_g = 0, n_l = n) & \quad \mu_g > \mu_l \text{ の場合} \\ \text{気液共存} & \quad \mu_g = \mu_l \text{ の場合} \end{aligned}$$

ちなみに

$$G \equiv U + PV - TS, \quad \mu_i \equiv u + Pv - Ts$$

であるので (TS の部分をエントロピー項と呼ぶ)

- 温度が高い場合, エントロピーのより大きな相のほうが相対的により小さな化学ポテンシャルを持ち安定に存在.
- 圧力が高い場合, 部分モル体積のより小さな相のほうが安定.

蒸気圧曲線 蒸気圧曲線は共存条件

$$\mu_g = \mu_l \quad (3.2)$$

を満たす P, T として記述される.

このままでは少々不便. 共存式 (3.2) を満たす曲線の傾きを計算.

$$\frac{\partial \mu_g}{\partial P} \delta P + \frac{\partial \mu_g}{\partial T} \delta T = \frac{\partial \mu_l}{\partial P} \delta P + \frac{\partial \mu_l}{\partial T} \delta T \quad (3.3)$$

一般的な関係式 $\frac{\partial \mu}{\partial P} = v, \frac{\partial \mu}{\partial T} = -s$ から

$$v_g \delta P - s_g \delta T = v_l \delta P - s_l \delta T$$

整理して

$$\left. \frac{dP}{dT} \right|_{eq} = \frac{\Delta s}{\Delta v} \quad (3.4)$$

$T \Delta s = \Delta h$ から

$$\left. \frac{dP}{dT} \right|_{eq} = \frac{\Delta h}{T \Delta v} \quad (3.5)$$

これをクラウジウス-クラペイロンの式という.

凝縮相の体積が無視でき, 気相が理想気体の法則に従うときには $\Delta v \approx v_g = RT/P$ から

$$\left. \frac{dP}{dT} \right|_{eq} = \frac{\Delta h}{RT^2} P \quad (3.6)$$

これを蒸気圧方程式と言う. ここで Δh は蒸発の潜熱 (気化熱) である.

問 Δh を一定として (3.6) 式を T について積分しなさい。このとき積分の初期値を $T = T_0$, $P = P_0$ とせよ。また 100°C での水の蒸気圧は 1 気圧である。 100°C における水の気化熱を 2260 J g^{-1} として 0°C から 350°C までの蒸気圧曲線のグラフを描きなさい。またそれを実際の値と比較しなさい。

3-4 解離平衡

以下では電離, 分子解離を記述。これは惑星下層大気がなぜ主として分子からなるのか理解するための基礎。

質量作用の法則 (解離度の圧力依存性) 分子 AB とそれらが分解して生じた原子 A および原子 B の混合物からなる系を考える。AB, A, B はいずれも理想気体の法則に従うものとする。



ギブス自由エネルギー最小の条件は

$$G(P, T, n_{AB}, n_A, n_B) = \min. \quad (3.7)$$

反応座標 ξ を導入。AB が n mol A+B に変化したら $\xi = n$ と定義。G 最小の条件から平衡状態では

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = 0 \quad (3.8)$$

が成立。ここで $\frac{\partial n_{AB}}{\partial \xi} = -1$, $\frac{\partial n_A}{\partial \xi} = 1$, $\frac{\partial n_B}{\partial \xi} = 1$ なので (3.9) は

$$-\frac{\partial G}{\partial n_{AB}} + \frac{\partial G}{\partial n_A} + \frac{\partial G}{\partial n_B} = 0 \quad (3.10)$$

ゆえに

$$-\mu_{AB} + \mu_A + \mu_B = 0 \quad (3.11)$$

理想気体の場合, 化学ポテンシャルは $\mu_i = \mu_i^\circ(P_0, T) + RT \ln(P_i/P_0)$ と記述されるので

$$\begin{aligned} \frac{P_A P_B}{P_{AB}} &= P_0 \exp\left(\frac{\mu_{AB}^\circ - \mu_A^\circ - \mu_B^\circ}{RT}\right) \\ &= K(T) \end{aligned} \quad (3.11)$$

右辺は T のみの関数。平衡定数と呼ばれる。

解離度 x を $P_A : P_{AB} = x : 1 - x$ と定義すると (3.5) 式は全圧 $P = P_{AB} + P_A + P_B$ を用いて

$$\frac{x}{1 - x^2} P = K(T) \quad (3.12)$$

T 一定の場合, P が増せ (減れ) ば解離度は減少 (増加) することが分かる。

4. 静水圧平衡とスケールハイト

4-1 基礎事項と方程式

圧力 単位面積あたりに働く力. 単位 $\text{Pa}=\text{N}/\text{m}^2=\text{J}/\text{m}^3$. 単位体積当たりのエネルギーという解釈も可

(c.f. ベルヌーイの定理: 一様完全流体・定常流・外力は保存力の場合, 流線に沿って $\frac{1}{2}\rho v^2 + P + \phi = \text{const}$).

鉛直方向 重力加速度と平行な方向. 重力加速度と同じ向きを鉛直下向き, 反対向きを鉛直上向きという.

器に張った流体: 静止状態では表面は鉛直方向と直交. 水平方向.

密度一定の静止流体層 密度 ρ , 深さ d , 重力加速度 g . 底の圧力 P は

$$P = \rho g d \quad (4.1)$$

流体層の底に限らず, 任意の深さでの圧力がこれで表現できる. 静水圧平衡の積分表現.

流体表面が鉛直方向に垂直でない場合, 水平方向に圧力の強弱. 流れが生じる. 惑星の流体圏での力の釣合いは静水圧平衡がもっとも大きく寄与. 流れを作る力はこれに比べて小さい.

微分形 密度・重力: 一般に変数

座標 z : 鉛直上向き,

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (4.2)$$

これを**静水圧平衡の式**と言う. ガス惑星や星の内部まで含めて表したいときには座標 z を中心からの距離 r に置換えて表現.

4-2 等温平行平板大気

簡単だが大気の構造を解析するために有効なモデル

- 状態方程式が理想気体のそれに従う (常温付近では数十気圧以下で良い近似)
- 等温等組成
- 惑星半径に比べて厚みが薄い (平行平板の仮定)
- 自己重力無視 (大気中の重力加速度一様)

状態方程式

$$PV = NRT \quad (4.3)$$

ここで N はモル数.

使いやすく変形. 1 mol あたりの気体の質量を μ とすると $N = V\rho/\mu$ であるから,

$$P = \frac{\rho}{\mu}RT \quad (4.4)$$

静水圧平衡解 状態方程式 (4.4) を使い静水圧平衡の式 (4.2) から密度を消去.

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{\mu g}{RT}P \quad (4.5)$$

重力一定としてこれを解く (境界条件 $P = P_0$ at $z = z_0$)

$$P = P_0 \exp\left[\frac{-\mu g(z - z_0)}{RT}\right] \quad (4.6)$$

ここで

$$H = \frac{RT}{\mu g} \quad (4.7)$$

とすると平衡解は

$$P = P_0 \exp\left[\frac{-(z - z_0)}{H}\right] \quad (4.8)$$

スケールハイト (4.7) 式の H をスケールハイトという. 圧力が $1/e$ に減少する高度を表す. 大気の厚みを表す尺度.

(4.7) 式を変形すると

$$mgH = kT \quad (4.8)$$

ここで m は分子1個の質量. $R = N_A k$, $\mu = N_A m$ (N_A はアボガドロ数) に注意. スケールハイトの分子運動論的解釈: (4.8) から分子の熱的な並進運動のエネルギーと位置エネルギーとがほぼ等しくなる高さとして解釈できる.

また温度・分子量・重力加速度が一定でない場合

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dz} = -\frac{1}{H(z)} \quad (4.9)$$

$$H(z) = \frac{RT(z)}{\mu(z)g(z)} \quad (4.10)$$

が成立. 各高度での H の値を局所スケールハイトという.

4-3 外気圏

(4.6)式では $z \rightarrow \infty$ でないかぎり $P \neq 0$. しかし P の極めて小さな希薄状態は流体とはみなせない.

気体が流体とみなせる条件 平均自由行程 \ll 系の特徴的な長さの尺度

平均自由行程: 気体分子が他の分子に衝突するまで自由に並進する平均距離 l で表すと近似的に

$$n\sigma l = 1 \quad (4.11)$$

から計算. ここで n は気体数密度, σ は分子の衝突断面積.

$$l = H \quad (4.12)$$

となる高度レベルを惑星の外気圏界面と呼ぶ. これより外側を外気圏(または外圏)と呼ぶ. より内側がいわゆる大気圏に相当.

4-4 大気の安定性

熱的散逸 大気分子の熱運動

- 気塊中の分子の大部分が脱出可能な熱運動エネルギーを持つ場合: 流体力学的散逸

$$\frac{kTr}{2GMm} = \frac{v_T^2}{v_{esc}^2} > 1$$
$$v_T = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}$$

ここで m は分子1個の質量.

- 大部分は脱出可能な熱運動エネルギーを持たない場合: ジーンズエスケープ

ジーンズエスケープ 外気圏界面に存在する気体分子のうち, 脱出速度を越える並進速度を持つ成分が散逸. 分子の速度分布はマックスウエル速度分布則. このとき散逸フラックス(外気圏界面単位表面積, 単位時間あたりに宇宙空間に失われる分子数) ϕ_{esc} は

$$\phi_{esc} = \int_{|v| \geq v_{esc}, v_z \geq 0} v_z f(\mathbf{v}) d^3v \quad (4.13)$$

から計算. f はマックスウエルの分布関数

$$f(\mathbf{v}) = n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right] \quad (4.14)$$

計算を実行すると

$$\phi_{esc} = n \frac{v_T}{2\pi^{1/2}} (1 + \lambda) e^{-\lambda} \quad (4.15)$$

ただし

$$\lambda = \frac{mv_{esc}^2}{2kT} = \frac{v_{esc}^2}{v_T^2}$$

λ を散逸パラメータと呼ぶ.

問題

以下の問いについて、導出過程も含めて過不足なくまとめること。そのためのコツのひとつに式変形は文字式で行い、数値の代入は一番最後に行うことがあげられる。数値の算出には電卓等を用いても構わない。締め切り 5/16.

1. 気温が a) 高度によらずに一定の場合と、 b) 高度 1 km あたり 10 K 減少する場合のそれぞれについて、気圧が 500 hPa となる高度を求めよ。ただし地表面圧力は 1000 hPa、地表面気温は 300 K、大気の実平均分子量は 30 g mol^{-1} 、重力加速度は 10 m s^{-2} とする。
2. 非圧縮流体からなる半径 R の天体内部での圧力分布を考える。簡単のため自転や流体の運動の影響は無視できるものとする。
 - (1) 密度が一様な場合について、惑星中心からの距離 $r (< R)$ の位置における重力加速度を密度 ρ と r を用いて表しなさい。必要な物理定数等は適宜導入して構わない。
 - (2)(1) の場合について静水圧平衡の式を書き下し、それを解いて天体内部の圧力を r の関数として求めなさい。ただし表面 ($r = R$) における圧力は 0 とする。
 - (3) この惑星が平均密度を保ったまま密度 ρ_c の核と密度 ρ_m のマントルに分化したとする ($\rho_c > \rho > \rho_m$)。このとき中心圧力は分化前と比べて増加するか減少するか調べよ。
3. 外気圏に関する以下の問いに答えなさい。
 - (1) (4.15) 式を導け (ヒント：円筒座標を導入。積分範囲に注意)。
 - (2) 問題 1. の大気 a) の場合について外気圏界面の高度を求めよ。分子の衝突断面積を $\sigma = 1 \times 10^{-19} \text{ m}^2$ とする。

5. 熱輸送過程としての放射

5-1 熱輸送の素過程

エネルギーフラックス 微小面積 dA を微小時間 dt の間に通過するエネルギーが

$$FdAdt$$

と表わされるとき、 F をエネルギーフラックス (エネルギー流束) という。

「単位面積を単位時間あたりに通過するエネルギー量」とも言える。

熱の輸送機構 伝導・対流 (または移流)・放射に大別できる

伝導 粒子の熱運動による。

$$F_{cond} = -k \frac{dT}{dl} \quad (5.1)$$

F_{cond} : 座標軸 l に直交する単位断面積を単位時間あたりに通過する熱量。

k : 熱伝導率 単位 $\text{J K}^{-1} \text{m}^{-1} \text{s}^{-1}$ 。熱の伝わりやすさを表す。

気体の場合には密度、比熱、熱運動速度、平均自由行程を使って

$$k \approx \frac{1}{3} \rho c_p v_T l. \quad (5.2)$$

これを ρc_p で割った量が熱拡散係数 (κ)。熱拡散係数は「温度の伝わりやすさ」を表す。

対流圏ではほとんど効かない。希薄な上層大気 (熱圏) では重要。

対流 流体塊の移動による。移流とも言う。

熱圏より下部で重要。流れのスケールや熱の運び方に応じてさらに細分される。

放射 光 (電磁波) を介在。

流体圏のほとんどあらゆる領域で重要。太陽、宇宙空間とのエネルギー授受の主役。

5-2 熱的な電磁波

物質と光の相互作用 光を時間変化する電場として考える。

吸収：電場が物質の電荷を運動させ、物質の内部エネルギーが増す。

放出：電荷の運動によって時間変化する電場が生じる。

自発放出：周囲の光の存在に関係なく放出

誘導放出：光に刺激されて放出

黒体 あらゆる振動数の光を吸収放出できる理想物質。0 K で真黒。

黒体壁 ($T > 0$) で囲まれた空洞内の熱平衡状態：放出吸収が釣り合う。この状態にある光が黒体放射 (黒体輻射)。様々な振動数と伝播方向をもった電磁波 (モード) の重ね合わせ。

黒体放射のエネルギー密度 振動数 $\nu \sim \nu + d\nu$ を持つ光の単位体積あたりのエネルギー = 単位体積あたりの独立したモードの個数 \times 1 モードあたりの平均エネルギー

モードの個数 空洞を一辺 L の立方体とする。壁面では光は完全吸収。定在波として存在できる電場は正整数 n_x, n_y, n_z を使い

$$\sin\left(\frac{n_x\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n_y\pi y}{L}\right)\sin\left(\frac{n_z\pi z}{L}\right)e^{i2\pi\nu t}. \quad (5.3)$$

n_x, n_y, n_z の 1 つの組が 2 つの独立モード (電場の偏りの独立方向が 2 つ) を表す。

$$\nu = \frac{c}{2L}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad (5.4)$$

ここで c は光の速さ。

範囲 $\nu \sim \nu + d\nu$ を (n_x, n_y, n_z) 空間の範囲に焼き直す

$$2L\nu/c \leq \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \leq 2L(\nu + d\nu)/c. \quad (5.5)$$

これは (n_x, n_y, n_z) 空間における半径 $2L\nu/c$ 、厚さ $2Ld\nu/c$ の 1/8 球殻を表す。この球殻内の整数組の個数はこの球殻体積に等しく、 $4\pi L^3\nu^2 d\nu/c^3$ 。この倍が一辺 L の立方体内の独立モード数。単位体積あたりでは

$$8\pi\nu^2 d\nu/c^3. \quad (5.6)$$

1 振動子の平均エネルギー 振動数 ν の独立した 1 モードのとりうるエネルギー $0, h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots, nh\nu, \dots$ (光の量子性)。統計力学の基本法則から、エネルギー $nh\nu$ にある確率は

$$\propto \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right)$$

よってエネルギーの平均値 $\langle \varepsilon_\nu \rangle$ は

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right)}. \quad (5.7)$$

計算を実行すると

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (5.8)$$

従って振動数 $\nu \sim \nu + d\nu$ を持つ光の単位体積当たりのエネルギーは

$$U(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} d\nu. \quad (5.9)$$

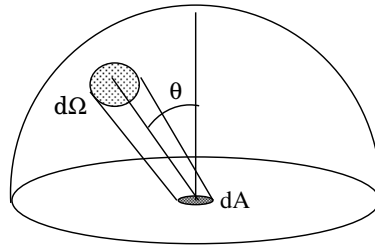
これをプランクの輻射式という.

5-3 放射伝達の方程式

放射強度 面積 dA を立体角要素 $d\Omega$ の方向に時間 dt に通過する振動数 $\nu \sim \nu + d\nu$ の電磁波のエネルギーを

$$I_\nu \cos \theta dA d\Omega dt d\nu \quad (5.10)$$

と表す. ここで θ は dA の法線方向と立体角要素のなす角. 単位は $\text{J m}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1} = \text{J m}^{-2} \text{sr}^{-1}$. I_ν を放射強度 (radiation intensity) という.



dA を通過する全放射エネルギーフラックスは

$$F = \int \int I_\nu \cos \theta d\Omega d\nu = \int F_\nu d\nu \quad (5.11)$$

ここで $F_\nu = \int I \cos \theta d\Omega$ は単位振動数当たりの放射エネルギーフラックス.

エネルギー密度との関係 単位振動数, 単位体積あたりに立体角 $d\Omega$ の方向に進んでいる電磁波のエネルギー密度を u_ν とする. このとき断面積 dA , 長さ cdt の円筒内部のエネルギーは

$$u_\nu dA c dt. \quad (5.12)$$

この光は dt の間に dA を通過するから

$$I_\nu dt dA = u_\nu dA c dt. \quad (5.13)$$

よって

$$I_\nu = u_\nu c \quad (5.14)$$

黒体放射の場合, u_ν の全立体角積分はプランクの輻射式に等しい. このとき放射は等方的なので $\int I_\nu d\Omega = 4\pi I_\nu$ 従って

$$I_\nu = \frac{c}{4\pi} U(\nu, T) \quad (5.15)$$

この時の I_ν を以後 $B_\nu(T)$ と記す

$$B_\nu(T) = \frac{2}{c^2} \frac{h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (5.16)$$

これを**プランク関数**という.

放射伝達 物質中を伝播する電磁波は吸収によって減衰したり, 放出によって強くなったりする.

密度 ρ の物質中を微小距離 ds 通過したときの放射強度の変化を dI_ν とすると

$$dI_\nu = -\kappa_\nu \rho I_\nu ds + \rho j_\nu ds \quad (5.17)$$

κ_ν を質量吸収係数, j_ν を放出係数と呼ぶ. 共に ν の関数. これを放射伝達方程式と言う (ここでは簡単のため散乱を無視).

キルヒホッフの法則 局所熱平衡が成立している時には

$$j_\nu = \kappa_\nu B_\nu(T) \quad (5.18)$$

が成立. つまり電磁波を吸収しやすい物質は, 同時に光を放出しやすい.

導出: 物質系が一様温度 T の熱平衡状態にあるとする. このとき放射強度は至るところでプランク関数に等しい. そのため任意の光路について

$$dI_\nu = -\kappa_\nu \rho I_\nu ds + \rho j_\nu ds = 0 \quad (5.19)$$

さらに $I_\nu = B_\nu(T)$ を用いてキルヒホッフの法則 (5.18) を得る.

局所熱平衡の仮定は考えている放射場の等価温度と物質の温度が近く, 十分高い頻度で分子間, 分子-光子間衝突が生じているときに良い近似. 地球では高度約 100km 以下, 赤外放射の波長域において成立っている.

6. 放射平衡

6-1 エネルギー平衡

部分系のエネルギー変化 エネルギー流入量と流出量の差が部分系 (体積 V , 表面積 A) のエネルギー変化.

$$\frac{d}{dt} \int_V e dV = - \int_A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} \quad (6.1)$$

e は単位体積当たりのエネルギー, \mathbf{F} はエネルギーフラックス.

$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} > 0$ のとき流出, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} < 0$ のとき流入.

エネルギー平衡の状態 流入量と流出量が一致した定常状態

c.f. 地球の大気と海洋は大局的にはエネルギー平衡の状態にある.

放射平衡 エネルギー輸送のメカニズムが放射過程のみの場合に実現されるエネルギー平衡. 大気の温度構造を支配.

$$F = \int_{\text{単位半球}} d\Omega \int dv \cos \theta I_\nu(\theta, \phi)$$

6-2 一次元放射平衡解

平行平板灰色大気 放射平衡にある大気の温度分布がどう決まるか調べるための有用なモデル. 次の仮定をおく.

- 平行平板大気 (ただし等温ではない 第4回参照)
- 局所熱力学平衡 (キルヒホッフの法則が成立)
- 惑星放射に対する吸収係数は波長に依らず一定 (灰色)
- 太陽放射に対しては透明

地面に一度吸収された熱が放射によって大気上層へどう伝達されるか調べ, 放射平衡にあるときの鉛直温度分布を求める.

基礎方程式

$$dI_\nu = -\kappa_\nu \rho I_\nu ds + \rho j_\nu ds \quad (6.2)$$

$$j_\nu = \kappa_\nu B_\nu(T) \quad (6.3)$$

これを振動数空間で積分 $I = \int I_\nu d\nu$ とおいて

$$dI = -\kappa \rho I ds + \kappa \rho B(T) ds \quad (6.4)$$

ここで $B(T)$ はプランク関数を振動数積分したもので

$$B(T) = \frac{\sigma T^4}{\pi} \quad (6.5)$$

光学的深さ 大気の不透明度を以下のように表現. 鉛直上向きに z 座標をとり

$$\tau(z) = \int_z^{\infty} \rho \kappa dz. \quad (6.6)$$

これを大気上端から計った光学的深さという.

地表まで積分したものを, 大気的全光学的深さ, という.

座標の変換 放射伝達方程式 (6.4) 式を τ を用いて書き直す. 天頂角を θ とすると

$$ds = dz / \cos \theta \quad (6.7)$$

また光学的深さの定義式を微分形で表すと $d\tau = -\kappa \rho dz$ なので

$$\kappa \rho ds = -d\tau / \cos \theta \quad (6.8)$$

ゆえに (6.4) 式は

$$\cos \theta \frac{dI}{d\tau} = I - B(T) \quad (6.9)$$

2 方向近似 (6.9) 式中の I は τ と天頂角と方位角の関数. これを上向きと下向きの 2 方向に自由度を落す.

もともと地面の熱放射が伝達される問題なので

- I は方位角にはよらない
- 上向き ($0 < \theta < \pi/2$), 下向き ($\pi/2 < \theta < \pi$) それぞれで天頂角依存性は小さい. それぞれ I_+, I_- とする.

$$F_{up} = \int_{\text{上半球}} d\Omega \cos \theta I = \pi I_+ \quad (6.10)$$

$$F_{down} = - \int_{\text{下半球}} d\Omega \cos \theta I = \pi I_- \quad (6.11)$$

とすると, $\int d\Omega (6.9) \times \cos \theta$ より

$$\frac{2}{3} \frac{dF_{up}}{d\tau} = F_{up} - \pi B \quad (6.12)$$

$$-\frac{2}{3} \frac{dF_{down}}{d\tau} = F_{down} - \pi B \quad (6.13)$$

放射平衡の条件 $\tau \sim \tau + d\tau$ の気層のエネルギーの釣合は

$$0 = [\text{流入}] - [\text{流出}] = [F_{up}(\tau + d\tau) + F_{down}(\tau)] - [F_{up}(\tau) + F_{down}(\tau + d\tau)] \quad (6.14)$$

整理して

$$F_{up}(\tau + d\tau) - F_{down}(\tau + d\tau) = F_{up}(\tau) - F_{down}(\tau) \quad (6.15)$$

したがって

$$F_{up}(\tau) - F_{down}(\tau) = \text{一定} \quad (6.16)$$

が放射平衡の条件. 大気上端 ($\tau = 0$) では $F_{down} = 0$, $F_{up} =$ 宇宙空間へ逃げる総放射エネルギーフラックス. 有効温度を用いて

$$F_{up}(\tau) - F_{down}(\tau) = \sigma T_{eff}^4$$

微分方程式を解く (6.12)+(6.13) を作ると (6.16) から左辺は消えて

$$0 = F_{up} + F_{down} - 2\pi B(T). \quad (6.17)$$

(6.12)-(6.13) を作ると

$$\frac{2}{3} \frac{d(F_{up} + F_{down})}{d\tau} = \sigma T_{eff}^4. \quad (6.18)$$

この右辺は一定値なので

$$F_{up} + F_{down} = \frac{3}{2} \sigma T_{eff}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right) \quad (6.19)$$

ここで $\tau = 0$ で $F_{up} = \sigma T_{eff}^4$, $F_{down} = 0$ の条件を用いた.

(6.17) 式から

$$\pi B(T) = \sigma T(\tau)^4 = \frac{1}{2} \sigma T_{eff}^4 \left(\frac{3}{2} \tau + 1 \right) \quad (6.20)$$

これで大気の温度分布が光学的深さの関数として解けた.

放射平衡解の地表温度ギャップ 地表面でのエネルギーの釣合を考えると

地表の放つ上向き放射 = 太陽放射 + 大気の下向き放射

$$\sigma T_s^4 = \sigma T_{eff}^4 + F_{down}(\tau_{total}) \quad (6.21)$$

ゆえに

$$\sigma T_s^4 = \frac{1}{2} \sigma T_{eff}^4 \left(\frac{3}{2} \tau + 2 \right) \quad (6.22)$$

よって $T_s > T(\tau_{total})$.

放射平衡解は対流不安定.

6-3 対流調節

対流の発生 地面と熱交換した気体塊は周囲よりも高温で低密度→鉛直対流が生じる。軽い気体塊上昇。大気の温度分布を変化させる。

対流調節 浮上する気塊は断熱膨張。このときの温度の高度分布を以下導出。

熱力学の第一法則 $dQ = 0$ (断熱) とすると 1mol あたり

$$C_v dT = -PdV \quad (6.23)$$

分子量を μ とすれば $V = \mu/\rho$, $P = \rho RT/\mu$ なので

$$C_v dT = RT d\rho/\rho \quad (6.24)$$

静水圧平衡の式

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (6.25)$$

を变形

$$RdT + RTd\rho/\rho = -\mu g dz \quad (6.26)$$

これに (5.24) を代入して

$$(C_v + R)dT = -\mu g dz \quad (6.27)$$

よって温度分布は

$$\frac{dT}{dz} = -\mu g/C_p \quad (6.28)$$

比熱が一定であれば

$$T = T_s - \frac{\mu g}{C_p} z$$

どの高度レベルまで対流するかは、惑星放射と太陽放射のバランスが保たれるという条件から決まる。

レポート問題

以下の問いについて、導出過程も含めて過不足なくまとめること。第三者が読んで分かる記述を心がけられたい。数値の算出やグラフの作成等に計算機等を用いても構わない。またワープロソフトの利用も歓迎する。締め切り 6/14。

1. プランク関数 ((5.16) の $B_\nu(T)$) について以下の問に答えよ。

(1) プランク関数からステファン-ボルツマンの法則を導きなさい。積分公式

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$
 を用いてよい。

- (2) 放射強度を振動数の代わりに波長を用いて表現することもよくおこなわれる。すなわち面積 dA を立体角要素 $d\Omega$ の方向に時間 dt に通過する波長 $\lambda \sim \lambda + d\lambda$ の光のエネルギーを

$$I_\lambda \cos \theta dA d\Omega dt d\lambda \quad (5.20)$$

と表現する。黒体放射の場合には

$$I_\lambda = B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1 \right]} \quad (5.21)$$

と表されることを示しなさい。

- (3) 温度 T を固定したときに、波長で表したプランク関数 (5.21) の最大値を与える波長は近似的に $3000/T(\text{K}) \mu\text{m}$ で表されることを示しなさい。
- (4) $T = 250 \text{ K}$ および 6000 K の場合について、波長で表したプランク関数の波長依存性を表すグラフを描きなさい。ただし関数値はそれぞれの温度における最大値で規格化したものをプロットしなさい。

2. 平行平板灰色大気について以下の問いに答えなさい。

- (1) 全光学的深さが $2/3$ であるとする。このときの吸収係数 κ_v の値を求めよ。ただし地表面気圧は 1 気圧 とし、重力加速度は 10 m s^{-2} とする。
- (2) この大気の有効温度が 255 K であるとき、地表面温度と地表面直上の気温を求めなさい。ただし温度分布は放射平衡によって定まるものとする。
- (3) この大気中で液体の水が存在できる気圧範囲を求めなさい。