地球惑星状態物理学　　課題（5 月 20 日出題）

4.1

(1)　単位面積を単位時間に通過する放射エネルギーフラックス F を計算．プランク関数を全振動数と立体角 (上半球) で次のように積分すればよい．

$$
\begin{aligned}
F &= \iint_0^{\infty} B_\nu(T)\cos\theta d\nu d\Omega \\
&= \int_0^{\infty} \frac{4\pi h}{c^2}\frac{\nu^3}{\exp\left(\dfrac{h\nu}{kT}\right)-1}d\nu \\
&= \int_0^{\infty} \frac{4\pi h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^3 \frac{\left(\dfrac{h\nu}{kT}\right)^3}{\exp\left(\dfrac{h\nu}{kT}\right)-1}d\nu
\end{aligned}
$$

ここで $\frac{h\nu}{kT}=x$ とおくと $d\nu=\frac{kT}{h}dx$ より

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{8\pi h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4\int_0^{\infty}\frac{x^3}{e^x-1}dx = \frac{8\pi h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4\frac{\pi^4}{15} \\
&= \frac{8\pi^5 k^4}{15c^2h^3}T^4
\end{aligned}
$$

となり、単位体積・単位時間当たりの黒体の出す放射エネルギーは温度 T の 4 乗に比例する。これがステファン・ボルツマンの法則である。

(2)　光速度を c とすると、$\lambda\nu = c \qquad d\nu = -c\lambda^{-2}d\lambda$
波長を用いて、単位体積当たりの振動子の個数（絶対値をとる）と 1 振動子の平均エネルギーをそれぞれ表すと

$$
\begin{aligned}
\text{振動子数} &= \left|-\frac{8\pi(c/\lambda)^2}{c^3}c\lambda^{-2}d\lambda\right| = \frac{8\pi}{\lambda^4}d\lambda \\
<\varepsilon_\lambda> &= \frac{hc}{\lambda[\exp(\dfrac{hc}{\lambda kT})-1]}
\end{aligned}
$$

$\lambda \sim \lambda + d\lambda$ の光の単位体積当たりのエネルギーは

$$
U(\lambda,T)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5\left[\exp\left(\dfrac{hc}{\lambda kT}\right)-1\right]}d\lambda
$$

よって、黒体放射の場合

$$\begin{aligned} I_\lambda = B_\lambda(T) &= \frac{c}{4\pi}U(\lambda,T) \\ &= \frac{2hc^2}{\lambda^5\left[\exp\left(\dfrac{hc}{\lambda kT}\right)-1\right]} \end{aligned}$$

と表すことができる。

(3) プランク定数 $h = 6.63 \times 10^{-34}[J \cdot s]$
光速度 $c = 3.00 \times 10^8[m/s]$
ボルツマン定数 $k = 1.38 \times 10^{-23}[J/K]$
$\frac{dB_\lambda}{d\lambda} = 0$ となる波長 λ を求める。

$$\begin{aligned} \frac{dB_\lambda}{d\lambda} &= -\frac{2hc^2\cdot 5}{\lambda^6[\exp(\frac{hc}{\lambda kT})-1]} + \frac{2hc^2}{\lambda^5[\exp(\frac{hc}{\lambda kT})-1]^2}\frac{hc}{\lambda^2 kT}\exp(\frac{hc}{\lambda kT}) \\ &= -\frac{5B_\lambda}{\lambda} + \frac{B_\lambda}{[\exp(\frac{hc}{\lambda kT})-1]}\frac{hc}{\lambda^2 kT}\exp(\frac{hc}{\lambda kT}) \\ &= \frac{B_\lambda}{\lambda}\left(-5 + \frac{hc}{\lambda kT\left(1-exp(-\frac{hc}{\lambda kT})\right)}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって

$$\frac{hc}{\lambda kT\left(1-exp(-\frac{hc}{\lambda kT})\right)} = 5$$

ここで

$$x = \frac{hc}{\lambda kT}\text{とおくと} \qquad \frac{x}{1-e^{-x}} = 5$$

これを変形すると

$$\frac{5-x}{5} = e^{-x}$$

$y = \frac{5-x}{5}$ と $y = e^{-x}$ のグラフの交点を考えると $x = 0, \quad x \simeq 5$
ここでは $x > 0$ なので $x \simeq 5$
よって B_λ の最大値を与える波長 λ は

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{hc}{kTx} \simeq \frac{hc}{5kT} = \frac{2.88\times 10^{-3}}{T} \quad [m] \\ &= \frac{2880}{T} \quad [\mu m] \end{aligned}$$

波長で表したプランク関数の最大値を与える波長は近似的に $3000/T[\mu m]$ で表される。

※もう少し精度の良い近似を得るには、e^{-x} を 5 のまわりでテーラー展開する。

$$
\begin{aligned}
e^{-x} &= e^{-(x-5)-5} = e^{-5}e^{-(x-5)} = e^{-5}\left(1-(x-5)\right) \\
&= e^{-5}(6-x)
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\frac{5-x}{5} &= e^{-x} \\
&= e^{-5}(6-x)
\end{aligned}
$$

これを解くと

$$
x = \frac{5-30e^{-5}}{1-5e^{-5}} \sim 4.965
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \frac{hc}{kTx} \sim \frac{2903}{T} \\
&\sim \frac{3000}{T} \quad [\mu m]
\end{aligned}
$$

(4)

4.2

(1)

$$
\begin{aligned}
\frac{J}{m^2 sr} &= \kappa_\nu \cdot \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{J}{m^2 sr} \cdot m \\
\kappa_\nu &= \left[\frac{m^2}{kg}\right]
\end{aligned}
$$

(2)　放出係数を無視すると（4.17）式は

$$
dI_\nu = -\kappa_\nu \rho I_\nu ds
$$

$\kappa_\nu \rho ds$ とおくと

$$
\frac{dI_\nu}{d\tau} = -I_\nu
$$

となる。またこれを解くと

$$I_\nu = Ae^{-\tau} \qquad (A \text{は定数})$$

$\tau = 0$ で $I_\nu = I_0$ より $I_0 = A$ したがって

$$I_\nu = I_0 e^{-\tau}$$