レポート解答例 (5/13 日出題分) **作成協力＝小松研吾**

3.1

平均分子質量 m は平均分子量 M、アボガドロ定数 $N_A(= 6.02 \times 10^{23})$ を用いて

$$m = \frac{M}{N_A}$$

で与えられる。したがってスケールハイトは式 (3.7) より

$$H = \frac{kT}{mg} = \frac{N_A kT}{Mg}$$

$k = 1.38 \times 10^{-23}$[J/K] とし、各惑星の表面温度、重力加速度は下の表の数値を用いる。

惑星名	地球	金星	火星	木星
表面温度 [K]	280	750	240	134
重力加速度 [m/s^2]	9.8	8.9	3.7	23.2

（理科年表より）

- 地球

$$\begin{aligned} H_e &= \frac{6.02 \times 10^{23} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 280}{29 \times 10^{-3} \times 9.8} \\ &= 8.18 \times 10^3 \quad [\mathrm{m}] \end{aligned}$$

- 金星

$$\begin{aligned} H_v &= \frac{6.02 \times 10^{23} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 750}{44 \times 10^{-3} \times 8.9} \\ &= 1.59 \times 10^4 \quad [\mathrm{m}] \end{aligned}$$

- 火星

$$\begin{aligned} H_m &= \frac{6.02 \times 10^{23} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 240}{44 \times 10^{-3} \times 3.7} \\ &= 1.22 \times 10^4 \quad [\mathrm{m}] \end{aligned}$$

- 木星

$$\begin{aligned} H_j &= \frac{6.02 \times 10^{23} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 134}{2.3 \times 10^{-3} \times 23.2} \\ &= 2.09 \times 10^4 \quad [\mathrm{m}] \end{aligned}$$

3.2

1. 惑星の中心からの距離 r での単位質量にかかる重力の釣り合いから

$$g(r) = G\frac{M(r)}{r^2} \qquad (G \text{ は万有引力定数})$$

   $M(r)$ は惑星の中心からの距離 r までの質量で

$$M(r) = \rho\int_0^r 4\pi r'^2 dr' = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 \tag{1}$$

   と表される。よって重力の釣り合いの式より重力加速度は

$$g(r) = \frac{4}{3}\pi G\rho r$$

   となる。

2. 静水圧平衡の式は

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g(r) = -\frac{4}{3}\pi G\rho^2 r$$

   両辺 r について R から r まで積分すると

$$\begin{aligned}
&\int_R^r \frac{dP}{dr'}dr' = -\frac{4}{3}\pi G\rho^2\int_R^r r'dr' \\
\Rightarrow\quad & P(r) - P(R) = -\frac{2}{3}\pi G\rho^2(r^2 - R^2) \\
\Rightarrow\quad & P(r) = \frac{2}{3}\pi G\rho^2(R^2 - r^2) \qquad (P(R) = 0 \text{ を用いた})
\end{aligned}$$

3. 表の値から (1) 式を用いて天体半径 R を求めると以下のようになる。

ケース	(1)	(2)	(3)
密度 [kg/m^3]	1.4×10^3	1.3×10^3	5.5×10^3
総質量 [kg]	1.97×10^{30}	1.91×10^{27}	5.97×10^{24}
天体半径 [m]	6.95×10^8	7.05×10^7	6.38×10^6

   よって、それぞれのケースでの天体の中心圧力は次のようになる。

   - ケース (1)

$$\begin{aligned}
P_1(0) &= \frac{2}{3}\times3.14\times6.67\times10^{-11}\times(1.4\times10^3)^2\times(6.95\times10^8)^2 \\
&= 1.32\times10^{14} \quad [\mathrm{N/m^2}]
\end{aligned}$$

- ケース (2)

$$\begin{aligned} P_2(0) &= \frac{2}{3}\times 3.14\times 6.67\times 10^{-11}\times(1.3\times 10^3)^2\times(7.05\times 10^7)^2 \\ &= 1.17\times 10^{12} \quad [\mathrm{N/m^2}] \end{aligned}$$

- ケース (3)

$$\begin{aligned} P_3(0) &= \frac{2}{3}\times 3.14\times 6.67\times 10^{-11}\times(5.5\times 10^3)^2\times(6.38\times 10^6)^2 \\ &= 1.72\times 10^{11} \quad [\mathrm{N/m^2}] \end{aligned}$$

3.3

1. $v_x = v_\perp\cos\theta, v_y = v_\perp\sin\theta, v_z = v_z$ と円筒座標に変数変換すると、$dv_x dv_y dv_z = v_\perp dv_\perp d\theta dv_z$ となり、また、積分区間は θ は $0\sim 2\pi$、$v_\perp$ は v_z が $0\sim v_{esc}$ の範囲では $(v_{esc}^2 - v_z^2)^{1/2}\sim\infty$、$v_z$ が $v_{esc}\sim\infty$ の範囲では $0\sim\infty$ となる。

$$\begin{aligned} \phi_{esc} &= \int_{|\boldsymbol{v}|\geq v_{esc}, v_z\geq 0} v_z f(\boldsymbol{v}) d^3\boldsymbol{v} \\ f(\boldsymbol{v}) &= n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2kT}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{esc} &= n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^{2\pi} d\theta\left\{\int_{v_z=0}^{v_z=v_{esc}}\int_{v_\perp=(v_{esc}^2-v_z^2)^{1/2}}^{v_\perp=\infty} dv_z dv_\perp\, v_\perp v_z\exp\left[-\frac{m(v_\perp^2+v_z^2)}{2kT}\right]\right. \\ &\quad\left. +\int_{v_z=v_{esc}}^{v_z=\infty}\int_{v_\perp=0}^{v_\perp=\infty} dv_z dv_\perp\, v_\perp v_z\exp\left[-\frac{m(v_\perp^2+v_z^2)}{2kT}\right]\right\} \\ &= 2\pi n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\left\{\int_{v_z=0}^{v_z=v_{esc}}\left[\int_{v_\perp=(v_{esc}^2-v_z^2)^{1/2}}^{v_\perp=\infty} v_\perp\exp\left[-\frac{mv_\perp^2}{2kT}\right]dv_\perp\right]v_z\exp\left[-\frac{mv_z^2}{2kT}\right]dv_z\right. \\ &\quad\left. +\int_{v_z=v_{esc}}^{v_z=\infty}\left[\int_{v_\perp=0}^{v_\perp=\infty} v_\perp\exp\left[-\frac{mv_\perp^2}{2kT}\right]dv_\perp\right]v_z\exp[-\frac{mv_z^2}{2kT}]dv_z\right\} \\ &= 2\pi n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\left\{\int_{v_z=0}^{v_z=v_{esc}}\left[-\frac{kT}{m}\exp\left[-\frac{mv_\perp^2}{2kT}\right]\right]_{v_\perp=(v_{esc}^2+v_z^2)^{1/2}}^{v_\perp=\infty} v_z\exp\left[-\frac{mv_z^2}{2kT}\right]dv_z\right. \\ &\quad\left. +\int_{v_z=v_{esc}}^{v_z=\infty}\left[-\frac{kT}{m}\exp\left[-\frac{mv_\perp^2}{2kT}\right]\right]_{v_\perp=0}^{v_\perp=\infty} v_z\exp\left[-\frac{mv_z^2}{2kT}\right]dv_z\right\} \\ &= 2\pi n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\left(\frac{kT}{m}\right)\left\{\exp\left[-\frac{mv_{esc}^2}{2kT}\right]\int_{v_z=0}^{v_z=v_{esc}} v_z dv_z + \int_{v_z=v_{esc}}^{v_z=\infty} v_z\exp\left[-\frac{mv_z^2}{2kT}\right]dv_z\right\} \\ &= 2\pi n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\left(\frac{kT}{m}\right)\left\{\exp\left[-\frac{mv_{esc}^2}{2kT}\right]\left(\frac{1}{2}v_{esc}^2\right)+\left(\frac{kT}{m}\right)\exp\left[-\frac{mv_{esc}^2}{2kT}\right]\right\} \end{aligned}$$

ここで、$v_T=(\frac{2kT}{m})^{1/2}, \lambda=\frac{mv_{esc}^2}{2kT}$ とおくと

$$\phi_{esc}=n\frac{v_T}{2\pi^{1/2}}(1+\lambda)e^{-\lambda}$$

を得る。

2. 平均自由行程を l、分子の衝突断面積を σ、気体数密度を n とすると定義より

$$n=\frac{1}{\sigma l}$$

気体が流体とみなせる条件は（平均自由行程）≪（系の特徴的長さスケール）である。$l=H(z)$ となる高さが外気圏界面と定義される。つまり、ここでは $z=500$[km] で $l=H(z)$ が成り立っているとする。ただし、$H(z)=\frac{kT(z)}{m(z)g(z)}$ は局所スケールハイト（特徴的長さスケール）である。外気圏界面での局所スケールハイトは高度 $z=$500[km]、温度 $T(z)=1\times10^3$[K]、$g(z)=9.8$[kg/s^2]、$m(z)=\frac{16\times10^{-3}}{6.02\times10^{23}}=2.66\times10^{-26}$[kg] とすると

$$H(z)=\frac{1.38\times10^{-23}\times10^3}{2.66\times10^{-26}\times9.8}=5.30\times10^4 \quad [\mathrm{m}] \quad =l$$

酸素原子の半径 r を 0.5[Å]（$=5\times10^{-11}$[m]）とすると衝突断面積 σ は

$$\sigma=\pi(2r)^2=3.14\times(2\times5\times10^{-11})^2=3.14\times10^{-20} \quad [/\mathrm{m}^2]$$

以上より外気圏界面での数密度は

$$n=\frac{1}{\sigma l}=\frac{1}{3.14\times10^{-20}\times5.30\times10^4}=6.01\times10^{14} \quad [/\mathrm{m}^3]$$

3. 地球の脱出速度 $v_{esc}=1.12\times10^4$[m/s] より

$$\lambda=\frac{mv_{esc}^2}{2kT}=\frac{2.66\times10^{-26}\times(1.12\times10^4)^2}{2\times1.38\times10^{-23}\times10^3}=1.20\times10^2$$
$$v_T=\left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}=\left(\frac{2\times1.38\times10^{-23}\times10^3}{2.66\times10^{-26}}\right)^{1/2}=1.02\times10^3 \quad [\mathrm{m/s}]$$

酸素原子の散逸フラックス ϕ_{esc} は 1. で得られた式より

$$\begin{aligned}\phi_{esc} &= 6.01\times10^{14}\times\frac{1.02\times10^3}{2\times(3.14)^{1/2}} \quad \times(1+1.20\times10^2)\times(2.72)^{-1.20\times10^2} \\ &= 1.49\times10^{-33} \quad [/\mathrm{m}^2\mathrm{s}]\end{aligned}$$

4. 外気圏界面の面積 S は $S = 4\times 3.14\times(6.9\times 10^6)^2 = 5.98\times 10^{14}[\mathrm{m}^2]$。
地球年齢 t（45 億年 $= 45\times 10^8\times 365\times 24\times 3600$ 秒）に散逸する酸素原子の個数 N_{esc} は

$$\begin{aligned} N_{esc} &= \phi_{esc} S t \\ &= 1.49\times 10^{-33}\times 5.98\times 10^{14}\times 1.42\times 10^{17} \\ &= 1.27\times 10^{-1} \quad [\text{個}] \end{aligned}$$

簡単のために、外気圏界面以内の地球大気がすべて標準大気であるとすると、その数密度 n_0 は $n_0 = (1000/22.4)\times 6.02\times 10^{23} = 2.68\times 10^{25}[/\mathrm{m}^3]$。よって、全大気の分子の個数 N_0 は

$$\begin{aligned} N_0 &= \frac{4}{3}\pi(z_2^3 - z_1^3)n_0 \\ &= \frac{4}{3}\times 3.14\times(6.87^3\times 10^{18} - 6.37^3\times 10^{18})\times 2.68\times 10^{25} \\ &= 7.41\times 10^{45} \quad [\text{個}] \end{aligned}$$

ただし、$z_2 = 6.87\times 10^6[\mathrm{m}]$（地球の中心から外気圏界面までの距離）、$z_1 = 6.37\times 10^6[\mathrm{m}]$（地球半径）である。よって、$N_{esc} \ll N_0$ となるので地球大気は地球年齢に渡って存在できる。

■ レポート講評 $\cdots$(by 倉本)

- 分子質量 $\neq$ 分子量
3.1 については「分子質量」と「分子量」を勘違いしているレポートが多かった．結果，明らかにおかしな値を出している解答がかなりある．得られた値に対して現実と比較してもっともらしいかどうか検討することは必須の思考である．

- 円筒座標の使い方
3.3 では (x, y, z)（位置空間）について円筒座標に変換するレポートがあったが，ここでは速度空間について円筒座標を用いればよい．また，積分は v_z が $0\sim v_{esc}$ と $v_{esc}\sim\infty$ に分けて考えなくてはならない．

- スケールハイト
3.3(2) ではスケールハイト H の値として外気圏界面の高さを用いるレポートが多かった．スケールハイトは大気の圧力が $1/e$ になる高度差であり，外気圏界面自身の高度とは別である．ここでは高度 500km での局所スケールハイトを計算する必要がある．

- 分からない問題の報告方法
全く未記入だったり，一言「分かりませんでした」で済ませてあるレポート

は評価できない．なにが分からないのか，どこまで分かってどこでつまづいているのか等,「わからなさの分析」を報告すべきである．実は分析しているうちに分かってしまうことが多い．