（令和６年８月８日実施）

令和 7 年度

北海道大学大学院理学院　物性物理学専攻・宇宙理学専攻 修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午後）

受験に関する注意

- 試験時間：　13:00〜15:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者（宇宙理学専攻を併願する者を含む）：**問題 III, IV** を解答すること。
- 宇宙理学専攻志望者：
  - 観測天文学，理論宇宙物理学，素粒子・宇宙論，原子核理論，情報メディア科学，原子核反応データ科学を志望するものは**問題 III, IV** を解答すること。
  - 惑星宇宙グループ, 宇宙物質科学グループ，相転移ダイナミクス，飛翔体観測を志望するものは**問題 III, IV, V, VI** の中から 2 つの問題を選択して解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 III	3 枚 (A4)
	問題 IV	2 枚 (A4)
	問題 V	2 枚 (A4)
	問題 VI	3 枚 (A4)
解答紙	2 問題分	6 枚 (B4)（各問題 3 枚）
草案紙	2 問題分	2 枚 (B4)（各問題 1 枚）

問題 III

問 1 位置の演算子 $\hat{\xi} = \xi$ と運動量の演算子 $\hat{p} = -i\hbar\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}$ を用いて，調和振動子のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{\xi}^2 \tag{1}$$

と書ける。ここで， m は質量， ω は角振動数， $\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものである。このとき，波動関数 $\phi(\xi)$ とエネルギー E をシュレディンガー方程式

$$\hat{H}\,\phi(\xi) = E\,\phi(\xi) \tag{2}$$

から求める。

1-1. 以下の演算子

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{\xi} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{\xi} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right) \tag{3}$$

に対して，交換関係 $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right]$ を求めよ。

1-2. 演算子 $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ は非負整数の固有値 $n = 0, 1, 2, 3, ...$ を持つ。さらに，ハミルトニアンは $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)$ と書けることから，調和振動子のエネルギー準位は,

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, 3, ...) \tag{4}$$

と求まる。ここで，固有値 n に対する規格化された固有波動関数を $\phi_n(\xi)$ とするとき，$\hat{a}^\dagger\phi_n(\xi)$ が固有値 $n+1$ を持つことを示せ。

1-3. 前問の結果より,

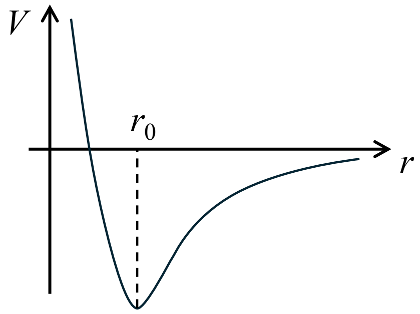
$$\phi_{n+1}(\xi) = C_n\hat{a}^\dagger\phi_n(\xi) \tag{5}$$

と書ける。 各 $n = 0, 1, 2, 3, ...$ に対して，規格化された固有波動関数 $\phi_n(\xi)$ が規格化条件 $\int_{-\infty}^{\infty}|\phi_n(\xi)|^2\mathrm{d}\xi = 1$ を満たすことを用いて，定数 C_n を求めよ。ただし， C_n は正の実数とする。

1-4. 基底状態の波動関数 $\phi_0(\xi)$ は $\hat{a}\,\phi_0(\xi) = 0$ を満たす。このことを用いて $\phi_0(\xi)$ の具体的な表式を求めよ。

1-5. 第一励起状態の波動関数 $\phi_1(\xi)$ の具体的な表式を求めよ。

問 2 束縛状態にある粒子 A と B の系について考える。粒子 A から見た粒子 B の位置を $\boldsymbol{r}$，粒子 A と B の換算質量を m，粒子間に働く力のポテンシャルを $V(r)$ とする。ただし，$r = |\boldsymbol{r}|$ である。$V(r)$ は下図のように有限の距離 r_0 で最小値をとるとする。粒子 A と B はスピン 1/2 のフェルミオンの同種粒子とする。以下で，$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものである。



まず，粒子 A と B の相対運動について考える。

2-1. 相対運動のハミルトニアン

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] + V(r) \tag{6}$$

を用いて，シュレディンガー方程式が

$$\hat{H}\,\psi(\boldsymbol{r}) = E\,\psi(\boldsymbol{r}) \tag{7}$$

と与えられる。波動関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ を動径方向の波動関数 $R_l(r)$ と球面調和関数 $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ $(l = 0, 1, 2, ..., m = -l, -l+1, ..., l-1, l)$ を用いて

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{R_l(r)}{r}\,Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{8}$$

と書く。このとき， $R_l(r)$ が従う方程式が

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}\right)R_l(r) = E\,R_l(r) \tag{9}$$

となることを示せ。ここで，球面調和関数の性質

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]Y_{lm}(\theta,\varphi) = -l(l+1)Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{10}$$

を用いてよい。

2-2. ポテンシャル $V(r)$ が最小点 r_0 の付近で急激に深くなっており，波動関数 $R_l(r)$ が r_0 の十分近くに局在していると仮定する。また， $R_l(r)$ の r_0 の付近での振る舞いに着目し，$\xi = r - r_0$ を用いて $\phi(\xi) = R_l(r_0 + \xi)$ と書く。ここで，式 (9) の括弧内の第三項を $\dfrac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr_0^2}$ と近似し，$V(r)$ を r_0 の周りで ξ の二次までテイラー展開して，$\phi(\xi)$ が従う方程式を求めよ。必要であれば，$V(r)$ の r_0 での一階導関数を $V'(r_0)$，二階導関数を $V''(r_0)$ と書いてよい。さらに，この近似の下で，粒子 A と B の相対運動のエネルギー準位を求めよ（ヒント： 問 1 の式 (4) を用いてよい）。

2-3. 高いエネルギー準位の状態に対しては，波動関数が $r = r_0$ の付近に局在しているという近似が悪くなる。その理由について簡潔に述べよ。

次に，粒子 A と B のスピンについて考える。 以下では，$\hbar = 1$ とする。

2-4. 粒子 A と粒子 B のスピン演算子をそれぞれ $\hat{\boldsymbol{s}}_{\mathrm{A}}$，$\hat{\boldsymbol{s}}_{\mathrm{B}}$ とし，全スピンの演算子を $\hat{\boldsymbol{S}} = \hat{\boldsymbol{s}}_{\mathrm{A}} + \hat{\boldsymbol{s}}_{\mathrm{B}}$ とする。また，各粒子 $j = \mathrm{A},\ \mathrm{B}$ に対して交換関係

$$\left[\hat{s}_j^x, \hat{s}_j^y\right] = i\hat{s}_j^z\,, \quad \left[\hat{s}_j^y, \hat{s}_j^z\right] = i\hat{s}_j^x\,, \quad \left[\hat{s}_j^z, \hat{s}_j^x\right] = i\hat{s}_j^y\,, \tag{11}$$

および，任意の $a, b = x, y, z$ に対して交換関係

$$\left[\hat{s}_{\mathrm{A}}^a, \hat{s}_{\mathrm{B}}^b\right] = 0 \tag{12}$$

が成り立つとする。これらの関係式を用いて，全スピンの大きさ $\hat{\boldsymbol{S}}^2$，全スピンの z 成分 $\hat{S}^z$，演算子 $\hat{S}^{\pm} = \hat{S}^x \pm i\hat{S}^y$ の間の交換関係

$$\left[\hat{\boldsymbol{S}}^2, \hat{S}^z\right]\,, \quad \left[\hat{\boldsymbol{S}}^2, \hat{S}^{\pm}\right]\,, \quad \left[\hat{S}^z, \hat{S}^{\pm}\right] \tag{13}$$

を計算せよ。

2-5. 一粒子のスピン 1/2 とスピン $-1/2$ の状態の波動関数をそれぞれ $|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ とし，粒子 A と B のスピンの状態 $|\chi\rangle$ を，4 つのスピン状態 $|\uparrow\rangle_{\mathrm{A}}|\uparrow\rangle_{\mathrm{B}}$，$|\uparrow\rangle_{\mathrm{A}}|\downarrow\rangle_{\mathrm{B}}$，$|\downarrow\rangle_{\mathrm{A}}|\uparrow\rangle_{\mathrm{B}}$，$|\downarrow\rangle_{\mathrm{A}}|\downarrow\rangle_{\mathrm{B}}$ の和で書くことにする。全スピンの大きさ $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ と全スピンの z 成分 $\hat{S}^z$ の同時固有状態を上の 4 つのスピン状態を用いて記述しその固有値を求めよ。さらに，各状態について，粒子 A と B の入れ替えで符号がどのように変換するか述べよ。必要があれば，各粒子 $j = \mathrm{A},\ \mathrm{B}$ について，$\hat{s}_j^{\pm} = \hat{s}_j^x \pm i\hat{s}_j^y$ を状態に作用させたとき，$\hat{s}_j^+|\uparrow\rangle_j = 0$，$\hat{s}_j^+|\downarrow\rangle_j = |\uparrow\rangle_j$，$\hat{s}_j^-|\downarrow\rangle_j = 0$，$\hat{s}_j^-|\uparrow\rangle_j = |\downarrow\rangle_j$ となることを用いてよい。

最後に，粒子 A と B の相対運動とスピンの両方を考慮した状態について考える。

2-6. 粒子 A と B の系の基底状態におけるスピンに関する状態とそのようになる理由を記述せよ。

問題 IV

問 1 上向きか下向きのスピン状態をとる磁気モーメント μ の原子 $N(\gg 1)$ 個からなる系について考える。以下では，ボルツマン定数 k，上向きスピン原子の数 n_1，下向きスピン原子の数 n_2 とする。解答では $n_1 + n_2$ は N で表すこと。指示がある場合はスターリングの公式 $\ln n! = n(\ln n - 1)$ を用いて簡単化すること。

この系のエントロピーを統計力学的に求める。

1-1. この系の状態数 W はどう表せるか。

1-2. エントロピー S を k, n_1, n_2, N を用いて表せ。n_1, n_2, N は非常に大きい数であるので，スターリングの公式を用いて簡単化すること。

1-3. この系は低温で強磁性を示し 0 K の極限で全てのスピンの揃った向きを上向きと定義する。0 K でのエントロピーを求めよ。

次に，磁気モーメント μ のスピン系が磁束密度の大きさ B で上向きスピンと同じ向きの外部磁場中にある場合を考える。ここで，スピン間の相互作用はないものとする。

1-4. この系のエネルギー E を n_1, n_2, μ, B を用いて表せ。

1-5. 状態密度 Ω の対数 $\ln \Omega(E)$ を E と N の関数として表せ。n_1, n_2, N は非常に大きい数であるので，スターリングの公式を用いて簡単化すること。

1-6. $\ln \Omega(E)$ のグラフの概形を描き，そのような振る舞いになる物理的解釈を述べよ。

問 2 圧力 P，体積 V，絶対温度 T の状態方程式 $PV = nRT$ を満たす n mol の理想気体からなる系を考える。R は気体定数。熱 Q と内部エネルギー U を用い，また熱は状態量でないことに注意しその微小量を d' と区別して表すと，熱力学第一法則は $\mathrm{d}'Q = \mathrm{d}U + P\mathrm{d}V$ と表せる。定積モル比熱と定圧モル比熱はそれぞれ $C_V \equiv \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\mathrm{d}'Q}{\mathrm{d}T}\right)_V$, $C_P \equiv \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\mathrm{d}'Q}{\mathrm{d}T}\right)_P$ で定義される。以下の問いに答えよ。

2-1. 問 2-3 で示すように，理想気体では U が V に依らないこと，すなわち $\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$ であることが知られている。ここではこのことを仮定し，準静的断熱過程に成り立つポアソンの式 $PV^{\gamma} = 一定$ を導け。ここで，$\gamma = (C_V + R)/C_V$ である。

2-2. マイヤーの関係式 $C_P = C_V + R$ を導け。必要があれば，U が V に依らないことを表す式 $\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$ を用いてよい。

2-3. ここまでで仮定した $\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$ を，エントロピー S が状態量であることを用いて示せ。

問題 V

以下の **問 1** から **問 3** に答えよ。解答にあたっては結果だけでなく，導出過程についても記すこと。

問 1 以下のように定義される行列 A について，以下の問に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1-1. 行列 A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ。

1-2. 行列 A を対角化せよ。

1-3. A^n を求めよ。ただし，n は自然数とする。

問 2 以下の問に答えよ。

2-1. 原点 O に対する点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$, $|\boldsymbol{r}| = r$ とする。このとき，以下の式が成り立つことを示せ。ただし，n は整数，$\boldsymbol{e}_r$ は $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトルとする。

$$\boldsymbol{\nabla} r^n = n r^{n-1} \boldsymbol{e}_r$$

2-2. スカラー関数 $\varphi = \varphi(x, y, z)$ に対し，$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\varphi) = 0$ となることを示せ。

2-3. 密度 $\rho(x, y, z, t)$ の流体が速度 $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ で運動しているとする。有限の体積を持つ領域の質量保存則から出発し，以下の方程式が成り立つことを示せ。ただし，流体の湧き出しも吸い込みもないとする。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0$$

問 3 x を実数，z を複素数とする。このとき，以下の問に答えよ。

3-1. i^i の実部と虚部をそれぞれ求めよ。

3-2. $\sin z = 2$ を満たす z を求めよ。

3-3. 次の積分を求めよ。ただし，積分路 C は図 1 のようにとれ。

$$\oint_C \frac{z^2}{z^4+4}dz$$

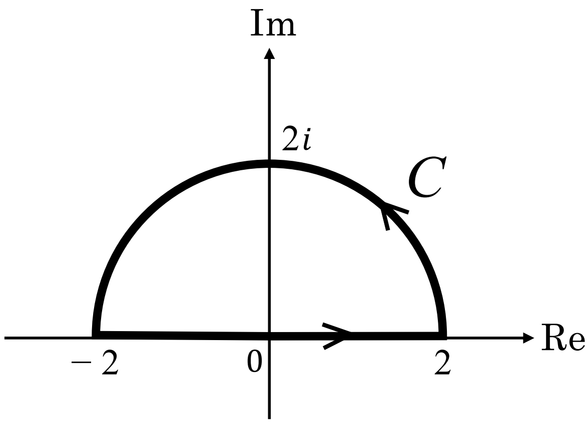


図 1

3-4. 前問 **3-3.** の結果を使って，次の実積分の値を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+4}dx$$

問題 VI

以下の**問 1** から**問 3** に答えよ。

問 1 表 1 に宇宙の元素存在度を示す。ここでは 92 種の天然元素のうち，存在度が高い 12 種の元素を取り出した。以下の問に答えよ。

表 1 宇宙の元素存在度 (抜粋, 個数比)

元素	存在度	元素	存在度
H	2.79×10^4	Mg	1.07
He	2.72×10^3	Al	0.08
C	10.1	Si	1.00
N	3.13	S	0.52
O	23.8	Ar	0.10
Ne	3.44	Fe	0.90

1-1. 地球でもっとも存在度の高い元素を 4 つ挙げよ。

1-2. 前問 **1-1** の元素のうち，2 つは地球の地殻にあまり含まれていない。その元素名を挙げよ。

1-3. 前問 **1-2** の 2 つの元素は，それぞれ地球内部のどの領域に主に分布するか答えよ。また，そのことの根拠となる観測事実を挙げ，それぞれ簡潔に説明せよ。

1-4. 海王星は，表面の大気組成が木星に似る。しかし，木星全体がほぼ H と He からなるのに対して，海王星は H_2O が主要構成物であると推定されている。なぜ海王星は H_2O を主要構成物とすると推定できるのか，木星と海王星の諸量を記した表 2 と宇宙の元素存在度に基づいて説明せよ。

表 2 木星と海王星の諸量

惑星	質量 [地球質量]	半径 [地球半径]	平均密度 [g/cm^3]
木星	317.83	10.973	1.326
海王星	17.15	3.865	1.638

問 2 等温の理想気体からなる大気を考える。ここでは，惑星の自転や大気の運動の影響は無視でき，また，大気の厚みは惑星半径に比べて十分小さく，重力加速度は高度によらず一定であり，惑星は球形とする。以下の問に答えよ。

2-1. 大気の総質量を M_a，重力加速度を g，惑星半径を a とする。このとき，地表面気圧 P_s を M_a，g，a を用いて表せ。

2-2. 惑星の単位表面積あたりに高度 z より上空に存在する大気質量を $\Sigma(z)$ とする。以下ではこれを柱密度と呼ぶ。高度 $z = 0$ における柱密度 $\Sigma(0)$ を，M_a と a を用いて表せ。

2-3. 任意の高度 z における気圧 $P(z)$ は次式を満たすことを示せ。

$$P(z) = \Sigma(z)g$$

2-4. 高度 z における大気密度を $\rho(z)$ とする。このとき

$$\frac{d\Sigma(z)}{dz} = -\,\rho(z)$$

が成り立つことを示せ。

2-5. 静水圧平衡の式

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

を導け。

2-6. 理想気体の状態方程式は $P = nkT$ と書ける。ここで n は数密度，k はボルツマン定数，T は温度を表す。$\rho = \mu m_{\mathrm{H}} n$ (μ : 平均分子量，m_{H} : 水素原子質量) に留意して静水圧平衡の式を P に関する常微分方程式

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{P}{H} \tag{1}$$

と表したとき，H を μ，m_{H}，k，T，g を用いて表せ。またこの H は何と呼ばれる量か，答えよ。

2-7. 式 (1) の解を，H を用いて表せ。地表面気圧を P_s とする。

2-8. 表 3 の数値を用い，地球類似大気と木星類似大気でそれぞれ H の値 [m] を有効数字 2 桁で求めよ。アボガドロ数 N_A を用いると $kN_A = R$ (気体定数 8.31 J/K mol) を満たすことを利用してよい。

表 3 仮想的な惑星大気の諸元

想定	平均分子量	重力加速度 [m/s^2]	気温 [K]
地球類似大気	30	10	300
木星類似大気	2.2	25	165

2-9. 上空で大気が十分に希薄になると，大気の流れによる攪拌の効果よりも，分子の熱運動による拡散の効果の方が卓越するようになる。このとき，分子量の小さな分子種が大気組成に占める割合は，高度とともに増加するか減少するか，理由と併せて答えよ。

問 3 リソスフェアとは岩石惑星の最表層を覆う低温の岩石層のことである。地球のリソスフェアはプレートと同一視される。太陽系の岩石惑星の表層環境とリソスフェアについて，以下の問に答えよ。

3-1. リソスフェアは，ある温度 T_c 以下の温度 T をもつ岩石層として定義することができる。表面温度 T_s をもつ惑星において，地温勾配 dT/dz が深さ z に拠らない一定値 Γ をとるとき，リソスフェアの厚さ L を T_s，T_c，Γ を用いて表せ。

3-2. 地球の平均地殻熱流量は 80×10^{-3} W/m^2 である。このときの地球表層の平均的な地温勾配 [K/m] を求めよ。地殻の熱伝導率を 4.0 W/K·m とする。

3-3. 前問 **3-2** で求めた地温勾配がリソスフェア内で保たれるものとし，地球の平均的なリソスフェアの厚さ [km] を求めよ。ここでは地球の平均地表面温度を 300 K，T_c=1300 K とする。

3-4. 惑星内部での単位時間あたりの放射性壊変熱が，熱伝導による惑星表面からの総放熱量と釣り合っている場合，平均地殻熱流量は惑星半径に比例することを示せ。ここでは惑星の平均密度や単位質量あたりの放射性壊変熱は，惑星によらず等しいとする。

3-5. 火星のリソスフェアの平均的な厚さは地球のそれのおよそ何倍か推定し，火星にプレート運動がない理由について考察せよ。なお，火星の半径は地球の半径の約 1/2 である。