（令和６年８月８日実施）

令和 7 年度

北海道大学大学院理学院　物性物理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午前）

受験に関する注意

- 試験時間：　9:00〜11:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者・宇宙理学専攻志望者とも**問題 I, II** を解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 I	2 枚 (A4)
	問題 II	4 枚 (A4)
解答紙	問題 I	3 枚 (B4)
	問題 II	3 枚 (B4)
草案紙	問題 I, II	2 枚 (B4)（各問題 1 枚）

問題 I

問 1 図 1 のように質量 m の $N(\gg 1)$ 個の質点がバネ定数 k の質量を無視できる $N(\gg 1)$ 個のバネで円環状に結ばれ，水平円周上に滑らかに束縛されている。このときの円周方向の微小運動を考える。

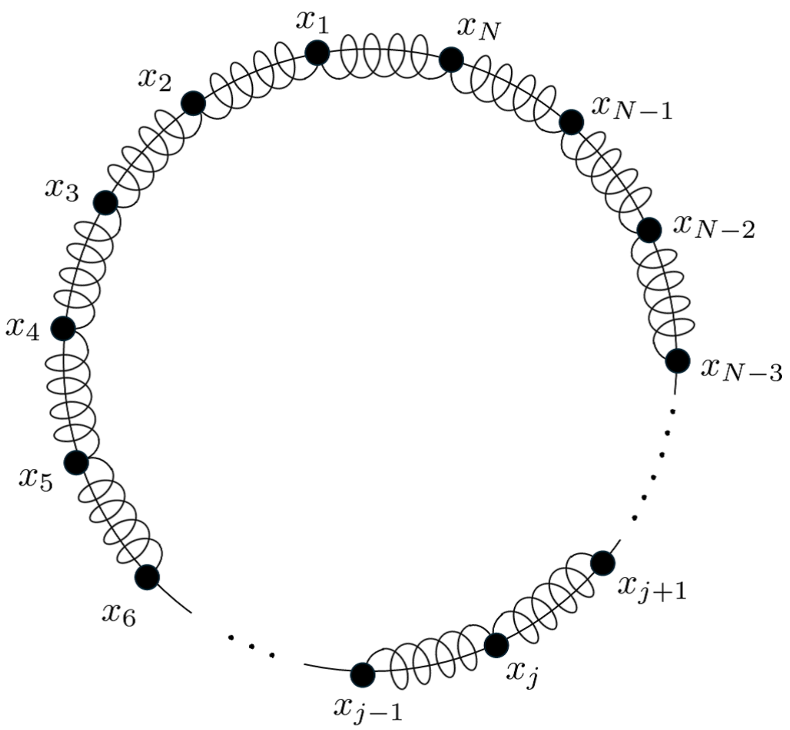

図 1

1-1. 質点の平衡位置からの変位を x_1，x_2，$\cdots$，x_{j-1}，x_j，x_{j+1}，$\cdots$，x_N $(j = 1,\ 2,\ \cdots, N)$ とする。ただし，x_1 と x_N は図 1 のように繋がっている。このときの運動エネルギー，及びポテンシャルエネルギーを導け。時間 t による微分を $\dot{x} \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \ddot{x} \equiv \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ とする。

1-2. 振動数 ω に対する特性方程式を求めよ。
ヒント: ラグランジアンから質点 x_j に対するラグランジュ方程式を導き，$x_j = A_j \cos(\omega t + \phi)$，$\lambda = \frac{k}{m}$ として整理せよ。

1-3. n 番目 $(n = 1, 2,\ \cdots,\ N)$ のモードの基準振動数 ω_n を導け。
ヒント: 周期境界条件を満たすように n 番目の基準振動における j 番目の質点の振幅を $A_j = A\sin(\eta_n j) + B\cos(\eta_n j)$，$\eta_n = 2\pi n/N$ とする。

1-4. N が偶数のとき，$n = N/2$ 番目のモードに対する運動の様子を記述せよ。

問 2 質量 M，長さ $2l$ の密度が一様な棒の上端に質量 m の質点を固定し，粗い水平な床の上に垂直にたて，その後静かに手を離すと棒が倒れはじめた。このときの運動について考える。ただし，棒は床の上を滑らないとする。棒の下端を原点 O として図 2 のように x, y 軸をとり，全体の重心 G の座標を (x, y) とする。床から棒の下端に鉛直上向きに働く垂直抗力の大きさを N，x 軸正方向に働く摩擦力の大きさを F，重力加速度の大きさを g とする。以下では図 2 のように，倒れている棒と y 軸のなす角を θ とする。

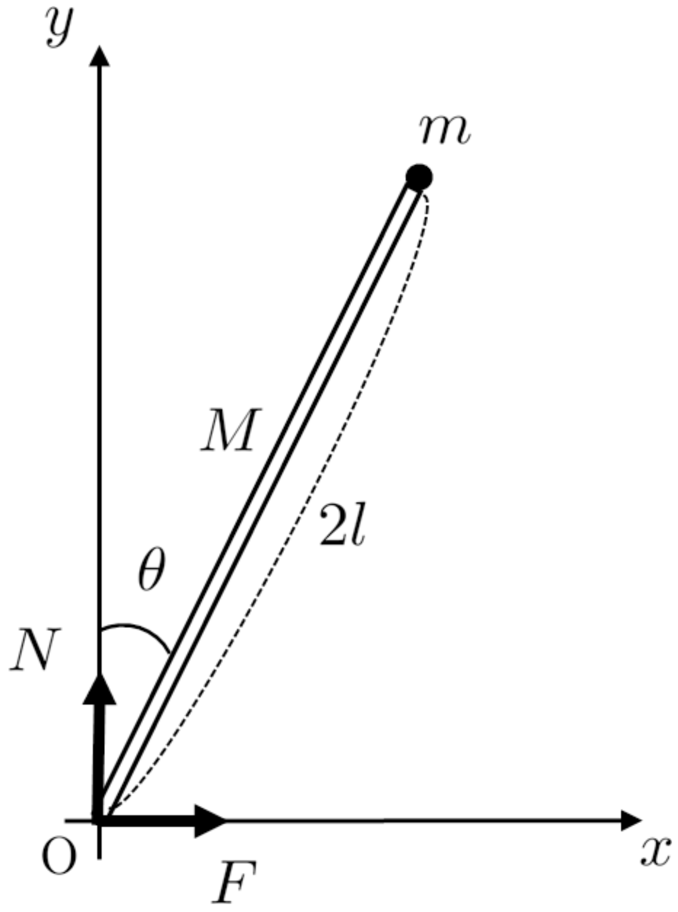

図 2

2-1. 棒の下端から全体の重心 G までの距離を l_1 とする。l_1 を M, m, l を用いて表せ。

2-2. 棒の下端 (原点 O) まわりの棒と質点の慣性モーメント I を M, m, l を用いて表せ。

2-3. 重心 G(x, y) の運動方程式を $M, m, g, F, N, \ddot{x}, \ddot{y}$ を用いて表せ。またエネルギー保存則を $M, m, g, l_1, I, \theta, \dot{\theta}$ を用いて表せ。ただし，$\ddot{x} \equiv \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$，$\ddot{y} \equiv \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$，$\dot{\theta} \equiv \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ とする。

2-4. N を M, m, g, l_1, I, θ を用いて表せ。

2-5. 棒の下端が床から離れるときの傾き角を M, m を用いて表せ。

問題 II

問 1 図 1 に示すように，誘電率 ε_0 の真空中に原点 O を含む yz 面を境界表面とし，$x \leq 0$ に広がった半無限導体が接地されている。x 軸上の点 A $(a,\, 0,\, 0)$ には点電荷 $+Q$ が固定されている。この時，$x \geq 0$ の領域の電場を電気鏡像法により考える。導体表面に対して，点 A の鏡像となる点を A$'$ とする。点 A$'$ に鏡像電荷 $-Q$ を置いて導体を取り除くことで，導体表面のあった位置が電位ゼロの等電位面となり，点電荷と導体からなる系の電場を再現することができる。

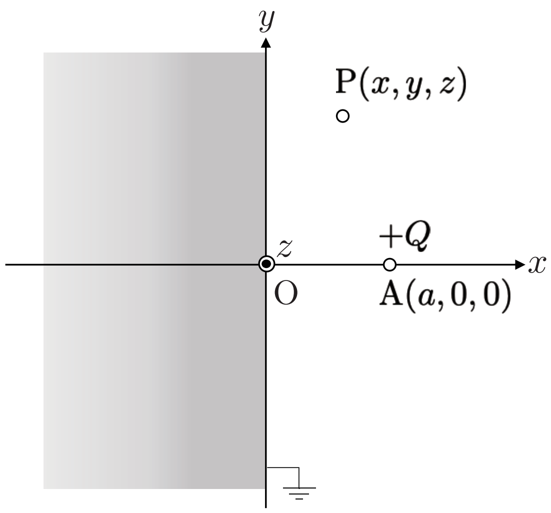

図 1

1-1. 点 A の電荷 Q が導体から受ける力の大きさを求めよ。

1-2. 点 P$(x,\, y,\, z)$ における電位を求めよ。また，yz 面上の点 $(0,\, y,\, z)$ における電場の x 成分 E_x を求めよ。

1-3. OP 間距離が OA 間距離に比べて十分大きい時，点 P の電位は OP 間距離の何乗に比例するか。定性的な考察から，理由とともに答えよ。

1-4. 導体表面に誘導される表面電荷密度を求め，その総和が $-Q$ に等しいことを示せ。

次に図 2 に示すように，原点 O に位置する半径 a の接地した導体球と，原点 O からの距離 b $(b > a)$ の点 B に固定された点電荷 $+Q$ がある。

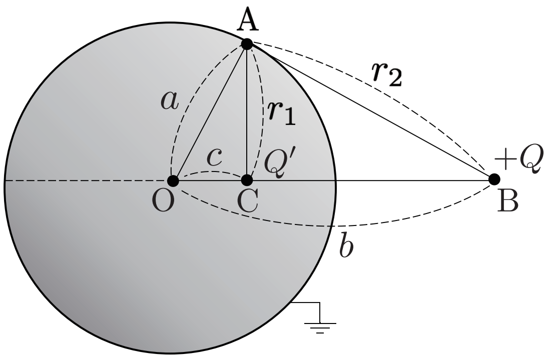

図 2

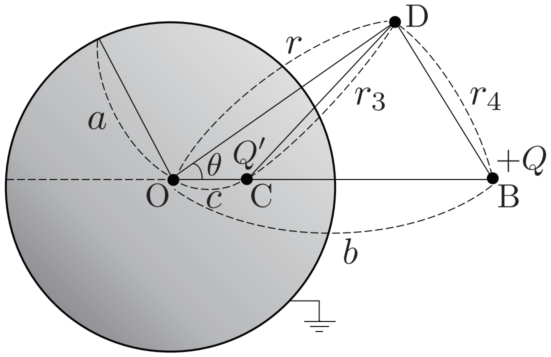

図 3

1-5. 鏡像電荷 Q' を OB 軸上で O からの距離が c の点 C に置き，導体球を取り除いて考えると，球面上に位置する任意の点 A における電位をゼロとすることができる。Q' と c を a, b, Q を用いて表せ。

ヒント：図 2 のように CA 間距離を r_1，BA 間距離を r_2 とおいて球面上の電位を考えよ。

1-6. 点 B の点電荷が導体球から受ける力の大きさを ε_0, Q, a, b を用いて表せ。

1-7. 原点 O からの距離が r で $\angle\mathrm{DOB} = \theta$ となる球外の点 D（図 3）における電位を $\varepsilon_0, Q, r, a, b, \theta$ を用いて表せ。ここで，CD 間距離を r_3, BD 間距離を r_4 とし, 余弦定理から得られる $r_4^2 = r^2 + b^2 - 2rb\cos\theta$ の関係式を用いてよい。

また, 導体球の表面に誘導される表面電荷密度 σ が以下の式で与えられることを示せ。

$$\sigma = -\frac{Q}{4\pi a}\frac{b^2 - a^2}{[a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta]^{3/2}} \qquad (1)$$

問 2 真空中における電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は，以下のマクスウェル方程式に従う。ここで，c は光速である。

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0, \quad \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0, \quad \mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

2-1. マクスウェル方程式から電場，磁束密度に関する波動方程式を求めよ。導出にあたって，以下のベクトル解析の公式を用いてよい。

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{E}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E}$$

一般に，電磁波は周波数が高くなると，中空の導体管の中を伝播することができる。図 4 に示すような二辺の長さが a, b で，z 方向に伸びる長方形導波管の中を伝搬する電磁波について考察する。以下では，z 方向に伝搬する電磁波で，電場 $\boldsymbol{E}$，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ に対して $E_z \neq 0, B_z = 0$ を満たす波を考える。

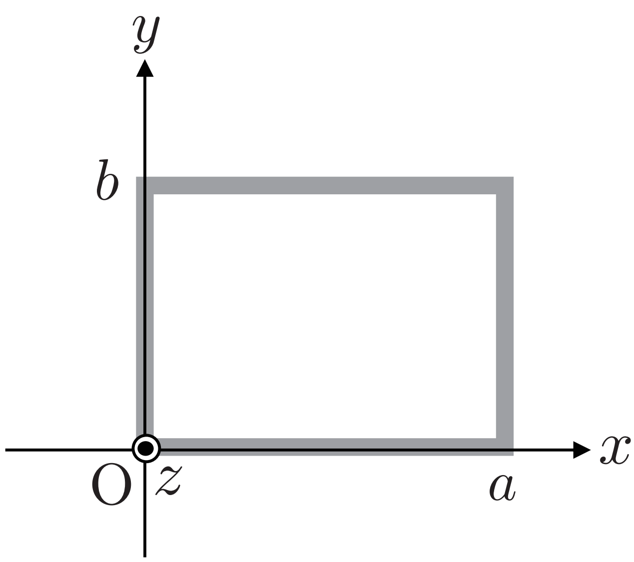

図 4

2-2. k を波数，ω を振動数として，電場の z 成分を $E_z = E_z(x, y)\exp(ikz - i\omega t)$ と表す時，$E_z(x, y)$ の満たす方程式は以下のように書ける。α^2 を k, ω, c を用いて表せ。

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \alpha^2 E_z = 0$$

2-3. 導波管の表面での境界条件 $E_z(x, y) = 0$ より，$E_z(x, y)$ と α が定数 E_0，正整数 m, n を用いて以下のように表せることを示せ。

$$E_z(x, y) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \qquad \alpha^2 \equiv \alpha_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

2-4. 正整数 m, n で指定される電磁波が導波管中を伝搬するために必要な最低の周波数 f_c（カットオフ周波数）を求めよ。

2-5. 導波管の二辺が, それぞれ $a = 4.00$ mm, $b = 3.00$ mm の時, 最も低エネルギーのモードについて, カットオフ周波数を有効数字 3 桁で求めよ。ただし, 光速を 3.00×10^8 m/s とする。