（令和 3 年 8 月 19 日実施）

令和 4 年度

北海道大学大学院理学院　物性物理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午後）

受験に関する注意

- 試験時間：　13:00〜15:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者（宇宙理学専攻を併願する者を含む）: **問題 III, IV** を解答すること。
- 宇宙理学専攻志望者：
  - 観測天文学、理論宇宙物理学、素粒子・宇宙論、原子核理論、情報メディア科学、原子核反応データ科学を志望するものは**問題 III, IV** を解答すること。
  - 理論惑星科学、惑星宇宙グループ、宇宙物質科学、相転移ダイナミクス、飛翔体観測を志望するものは**問題 III, IV, V, VI** の中から 2 つの問題を選択して解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 III	2 枚
	問題 IV	2 枚
	問題 V	2 枚
	問題 VI	1 枚
解答紙	2 問題分	6 枚（各問題 3 枚）
草案紙	2 問題分	2 枚（各問題 1 枚）

問題 III

問 1 一様な静磁場 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ 中にある質量 m、電荷 q の粒子を考える。ここでは、$B > 0$、$q > 0$ とし、$\boldsymbol{B}$ をもたらすベクトルポテンシャルを $\boldsymbol{A}(x) = (0, Bx, 0)$ とする。また、位置演算子 $\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ と運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$ は、交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_y] = [\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar$ を満たすものとして、以下のハミルトニアンを考える:

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2m}\left[\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}(\hat{x})\right]^2, \quad (c\text{: 光速}).$$

1-1. 運動量の y、z 成分が保存量であること、すなわち $[\mathcal{H}_0, \hat{p}_y] = [\mathcal{H}_0, \hat{p}_z] = 0$ を示せ。

この粒子の z 方向の運動は x-y 面内の運動に影響を与えないので、以下では z 方向成分を無視したハミルトニアン

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{p}_x^2 + \left(k_y - \frac{qB}{c}\hat{x}\right)^2\right], \quad (k_y : \hat{p}_y\text{の固有値}),$$

を考える。ここで、以下の生成・消滅演算子を導入する:

$$\hat{\alpha}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left[\left(\hat{x} - \frac{ck_y}{qB}\right) - \frac{i}{m\omega}\hat{p}_x\right],\ \hat{\alpha} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left[\left(\hat{x} - \frac{ck_y}{qB}\right) + \frac{i}{m\omega}\hat{p}_x\right], \quad \left(\omega = \frac{qB}{mc}\right).$$

1-2. $[\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^\dagger] = 1$ を示せ。

1-3. 数演算子 $\hat{N} = \hat{\alpha}^\dagger\hat{\alpha}$ を用いて、$\mathcal{H} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$ となることを示せ。

この系は調和振動子系とみなすことができ、その固有状態は数演算子 $\hat{N}$ の固有状態となる。系の範囲を $(-\infty \leq x \leq \infty,\ 0 \leq y \leq L)$ とし、y 方向には周期境界条件を課して，この系の基底状態について考える。基底状態の波動関数 $\psi_0(x, y)$ は、

$$\psi_0(x, y) = \phi_0(x)\exp\left(\frac{i}{\hbar}k_y y\right),$$

と変数分離した形で表すことが出来る。

1-4. y 方向の周期境界条件から、k_y の具体的表式を示せ。

1-5. $\phi_0(x)$ のみたす微分方程式を導出し、規格化された $\psi_0(x, y)$ を求めよ。

1-6. **1-4.** と **1-5.** の結果から、基底状態は縮退していることがわかる。確率密度 $|\psi_0(x, y)|^2$ の概形を示し、縮退した各状態がどのように空間分布しているか、簡潔に述べよ。

1-7. 面積 $L \times L$ 正方形内の縮退状態の数 W を評価し、縮退度 $\Phi(= W/L^2)$ の具体的表式を示せ。

問 2 電子のスピン角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{s}}$ とする。$\hat{\boldsymbol{s}}^2$ と $\hat{s}_z$ の同時固有状態 $|s,m\rangle$ は、$\hat{\boldsymbol{s}}^2|s,\,m\rangle = \hbar^2 s(s+1)|s,\,m\rangle$、$\hat{\boldsymbol{s}}_z|s,\,m\rangle = \hbar m|s,\,m\rangle$ を満たし、$s = \dfrac{1}{2}$、$m = \pm\dfrac{1}{2}$ である。以下では簡単のため

$$|+\rangle = \left|\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right\rangle,\ \ |-\rangle = \left|\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\right\rangle,$$

とする。また、パウリスピン演算子 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ を用いて、$\hat{\boldsymbol{s}} = \dfrac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ と表すことができる。$|+\rangle$ と $|-\rangle$ を

$$|+\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad |-\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

というベクトルで与えられる表現基底とすると、$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ は

$$\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix},$$

という行列で表すことが出来る。

このスピンに x 軸方向振動磁場 $\boldsymbol{B} = (B\cos\omega t, 0, 0)$ が印加されている。系のハミルトニアンは、相互作用定数 λ を用いて、

$$\mathcal{H} = -\lambda(\boldsymbol{B}\cdot\hat{\boldsymbol{s}}) = -\lambda B\hat{s}_x\cos\omega t,$$

と与えられる。

2-1. $\hat{\boldsymbol{s}}^2$ と $\hat{s}_z$ の交換関係を示せ。

2-2. $\hat{s}_x$ の固有値、および規格化した固有状態を $|+\rangle$ と $|-\rangle$ の線形結合で表せ。

2-3. $i\hbar\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle = \mathcal{H}|\psi(t)\rangle$ より、時刻 t の状態 $|\psi(t)\rangle$ を求めよ。ここで、時刻 $t=0$ でスピンは z 軸負方向を向いていた。つまり $|\psi(0)\rangle = |-\rangle$ とする。

問題 IV

問 1 気体の不可逆的断熱変化におけるエントロピー増大の法則について考察する。

まず準備として、気体のエントロピー S について次の問いに答えよ。

1-1. S を内部エネルギー U と体積 V の関数 $S(U,V)$ とみなすとき、気体の絶対温度 T と圧力 P を用いてその全微分 $\mathrm{d}S$ を書き下せ。

1-2. 定積モル比熱が C_V である n モルの理想気体について、T と P を U と V の関数として表せ。ただし気体定数を R とする。

1-3. 以上のことから、この理想気体のエントロピー変化 $\Delta S = S(U,V) - S(U_0,V_0)$ を求めよ。

図１のように、断熱材でできたシリンダ内に摩擦のない可動ピストンで前問 **1-2.** の理想気体を封入し、一定の外圧 P_0 をかけたところ、気体は体積 V_0 の熱平衡状態になった。次に、その状態から突然外圧を P_1 に変えたところ、暫くして体積 V_1 の熱平衡状態になった。

1-4. 外圧変化後の体積 V_1 を求めよ。

1-5. 外圧を x 倍にしたとき（すなわち $P_1 = xP_0$ としたとき）体積 V と内部エネルギー U はそれぞれ何倍になるか。

1-6. この外圧変化の前後におけるエントロピー変化 ΔS を x の関数として求めよ。

1-7. 任意の $x > 0$ に対して $\Delta S \geq 0$ であることを示せ。

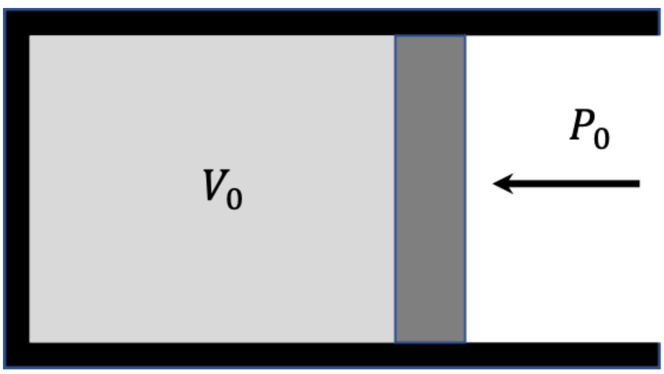

図１

問 2 図 2 のように、相互作用をしない質量 m の同種粒子 N 個からなる気体をシリンダ内に入れ、質量 M の摩擦のない可動ピストンで封入し、一定の外圧 P をかけながら温度 T の熱浴と接触させた。j 番目の粒子の運動量と位置ベクトルを $\boldsymbol{p}_j, \boldsymbol{r}_j$ として、気体とピストンを合わせた系のハミルトニアンが

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\boldsymbol{p}_j^2}{2m} + \frac{p_{\mathrm{p}}^2}{2M} + PAx_{\mathrm{p}}$$

と表されるとする。ここで A はシリンダとピストンの断面積、p_{p} はピストンの可動方向の運動量、x_{p} はシリンダの底面からピストンまでの距離（したがって気体封入体積は $V = Ax_{\mathrm{p}}$）である。古典系としての微視的状態は $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_N, \boldsymbol{r}_N, p_{\mathrm{p}}, x_{\mathrm{p}})$ で指定されるとして次の問いに答えよ。ボルツマン定数を k_{B}、プランク定数を $h(= 2\pi\hbar)$ とする。必要ならば $N \gg 1$ として扱ってよい。

2-1. この系の分配関数 Z を求めよ。

2-2. この系のエネルギーの熱平均値 $\langle \mathcal{H} \rangle$ を求めよ。

2-3. 気体の体積の熱平均値 $\langle V \rangle = A\langle x_{\mathrm{p}} \rangle$ 及び相対的な揺らぎの分散

$$\frac{\langle \Delta V^2 \rangle}{\langle V \rangle^2} = \frac{\langle V^2 \rangle - \langle V \rangle^2}{\langle V \rangle^2}$$

を求めよ。

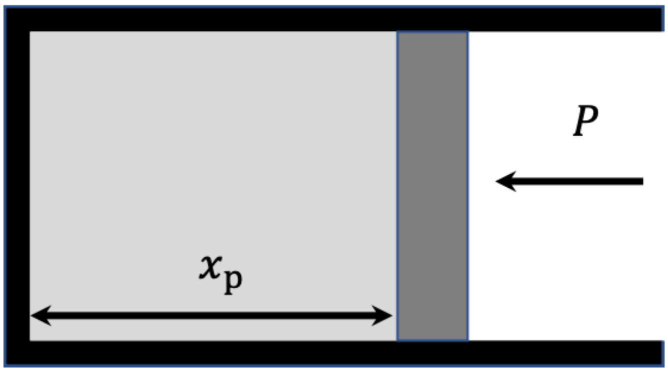

図 2

問題 V

以下の問に答えよ。解答にあたっては結果だけでなく、導出過程も記すこと。

問 1 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & -1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。ここで a は実数である。

問 2 位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$、定ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とする。このとき以下の設問に答えよ。

2-1. $\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}$ がなりたつことを示せ。

2-2. $\mathrm{div}\,(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}) = 0$ がなりたつことを示せ。

2-3. $\mathrm{rot}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{a}$ がなりたつことを示せ。

2-4. $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき、$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r} = |\boldsymbol{a}|^2$ を満たす $\boldsymbol{r}$ の集合はどのような面を描くか答えよ。

問 3 二変数関数 $u(x, y) = e^x \cos y$ について以下の設問に答えよ。

3-1. $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ を求めよ。

3-2. $u(x, y)$ が一定値を取るように x, y が変化する場合、x, y は次式を満たすことを示せ。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos y}{\sin y}$$

3-3. $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ を満たす $v(x, y)$ を求めよ。

問 4 次の定積分を求めよ。$t \geq 0$ とする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1 + x^2} dx$$

問 5 無限数直線上にランダムに点が打たれている。単位長の区間に含まれる点の数の期待値を p とする。このとき以下の設問に答えよ。

5-1. 単位長の区間を 1 つ取り出す。この区間を、n 個 $(n \gg p)$ に等分割し、各細分区間には点が二つ以上入ることはないとする。このとき、ある一つの細分区間内に点が存在する

確率を p, n を用いて表せ。

5-2. 上記の細分区間を m 個 $(m < n)$ とりだしたとき、いずれか一つの細分区間にのみ点が存在する確率を p, n, m を用いて表せ。

5-3. 長さ $r < 1$ の区間内に点が 1 つだけ存在する確率は、**5-2** で得た確率を、$r = m/n$ を一定に保ちながら分割数 n を無限大にすることで得られる。この確率は

$$pre^{-pr}$$

と表されることを示せ。ここでは $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$ を用いて良い。

問題 VI

体積 $V_0[\mathrm{m}^3]$，温度 $T_0[\mathrm{K}]$，相対湿度 R_0 の気塊が地表にある．地表における気塊の組成と温度 $T_0[\mathrm{K}]$ は周囲の大気のそれに等しい．気塊は周囲の大気と混合せず，熱のやり取りはない一方，圧力は周囲の大気のそれに従うものとする．必要に応じて乾燥断熱減率 Γ_d，湿潤断熱減率 Γ_w などのパラメータを導入し、適宜グラフや模式図を用いて，以下の問いに答えよ．

問１　この気塊が何らかの理由によって少し上昇したところ，浮力によってそのまま上昇を続けた．この時，地表付近の大気温度の鉛直分布はどのようになっていると考えられるか，論ぜよ．ただし気塊の中で水滴（雲粒）は生じていない．

問２　気塊が上昇を続け，温度の高度分布が湿潤断熱減率に従う大気層に突入した．この前後で，気塊の浮力の鉛直変化率にどのような変化が生じると考えられるか，論ぜよ．ただし，気塊の中に水滴（雲粒）は生じていない．

問３　気塊が高度 $h[\mathrm{m}]$ に達した時，気塊の中に雲粒が生じた．気塊の初期状態から，h はどのように求めることができるか議論せよ．ただし，水蒸気の飽和蒸気圧曲線は既知のものとして使って良い．また，気塊の中には微量のエアロゾルが含まれており，相対湿度が 100%になると直ちに雲粒を生じるものとする．

問４　問３の後，気塊の浮力の鉛直変化率にどのような変化が生じると考えられるか，論ぜよ．

問５ 積乱雲の雲底及び雲頂高度が観測により求められた．この時，大気の鉛直構造についてどのような制約をどこまで与えることができるか論ぜよ．さらに，どのような観測を加えれば，大気の構造に関してより多くの情報を得ることができるか，論ぜよ．