

(平成 29 年 8 月 17 日実施)

平成 30 年度

北海道大学大学院理学院 物性物理学専攻・宇宙理学専攻 修士（博士前期）課程入学試験 専門科目問題（午後）

受験に関する注意

- 試験時間： 13:00～15:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者（宇宙理学専攻を併願する者を含む）：問題 III, IV を解答すること。
- 宇宙理学専攻志望者：
 - － 宇宙物理学・素粒子論・原子核理論・情報メディア科学・原子核反応データ科学を志望するものは問題 III, IV を解答すること。
 - － 惑星宇宙グループ・宇宙物質科学・相転移ダイナミクス・飛翔体観測を志望するものは問題 III, IV, V, VI, VII の中から 2 つの問題を選択して解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 III	2 枚 (A4)
	問題 IV	2 枚 (A4)
	問題 V	1 枚 (A4)
	問題 VI	2 枚 (A4)
	問題 VII	3 枚 (A4)
解答紙	2 問題分	6 枚 (B4) (各問題 3 枚)
	問題 VII 作図用	1 枚 (B4)
草案紙	2 問題分	2 枚 (B4) (各問題 1 枚)

問題 III

以下の問 1 から問 2 までの全ての設問に答えよ。

問 1 質量 m の粒子が固有振動数 ω で 1 次元調和振動している。位置座標演算子を \hat{x} とし、その共役な運動量演算子を $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$ とするとき、粒子のハミルトニアン \hat{H} は、

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

で与えられる。

1-1. 以下の様に演算子 \hat{a} 、 \hat{a}^\dagger を定義する。交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ を求めよ。

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right)$$

1-2. 演算子 $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ を導入し、その規格化された固有状態を $|n\rangle$ 、その固有値を n とする。 $n = \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle \geq 0$ と、 $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$ 、 $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$ の関係を使うと、 n は非負の整数であり、

$$\hat{a} |n\rangle = \alpha |n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger |n\rangle = \beta |n+1\rangle$$

の関係が成り立つことを示せる。定数 α 、 β を求めよ。ただし、 α 、 β は非負の実数とせよ。

1-3. ハミルトニアン \hat{H} を演算子 \hat{N} を用いて表せ。また固有状態 $|n\rangle$ でのエネルギー固有値を求めよ。

1-4. この系の基底状態は $|0\rangle$ である。固有状態 $|n\rangle$ を $|0\rangle$ と演算子 \hat{a}^\dagger を用いて表せ。

1-5. $\bar{x} = \langle n | \hat{x} | n \rangle$ 、 $\bar{p} = \langle n | \hat{p} | n \rangle$ とするとき、固有状態 $|n\rangle$ での粒子の位置 x と運動量 p の不確定さを $\Delta x = \sqrt{\langle n | (\hat{x} - \bar{x})^2 | n \rangle}$ 、 $\Delta p = \sqrt{\langle n | (\hat{p} - \bar{p})^2 | n \rangle}$ で定義する。 $\Delta x \Delta p$ を \hbar と n を用いて表せ。

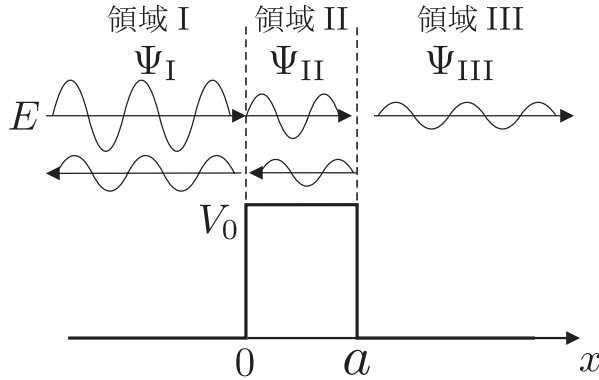
1-6. 基底状態 $|0\rangle$ の座標表示は $\psi_0(x) = \langle x | 0 \rangle$ となる。 $\hat{a} | 0 \rangle = 0$ の関係式を使って、 $\psi_0(x)$ を求めよ。ただし、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

の関係式を使ってもよい。

問 2 下図のような幅 a 、高さ $V_0 (> 0)$ の 1 次元箱型ポテンシャル障壁を考える。領域 I ($x < 0$)、領域 II ($0 \leq x \leq a$)、領域 III ($x > a$) を図のようにとり、領域 I から x の正の方向へ質量 m 、エネルギー E の粒子を入射した。

領域 I での入射粒子の波動関数を、波数 $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ を用いて Ae^{ikx} とする。ポテンシャル境界での粒子の透過と反射を考慮すると、領域 I, II, III における波動関数 $\Psi_I, \Psi_{II}, \Psi_{III}$ は、それぞれ式 (1) (2) (3) で与えられる。ここで、エネルギーは $E > V_0$ を満たしており、 $q = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$ とする。また B, C, D, F は未知定数である。



$$\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (1)$$

$$\psi_{II}(x) = Ce^{iqx} + De^{-iqx} \quad (2)$$

$$\psi_{III}(x) = Fe^{ikx} \quad (3)$$

2-1. 粒子の確率密度の流れ $j(x)$ は以下の式で与えられる。領域 III で、ポテンシャル障壁を透過した確率密度の流れを \hbar, k, m, F を用いて表せ。

$$j(x) = -\frac{i\hbar}{2m} [\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi^*) \psi]$$

2-2. 入射波 Ae^{ikx} が領域 III へ透過する確率 T と領域 I へ反射される確率 R を A, B, C, D, F を用いて表せ。

2-3. 透過率 T を \hbar, E, V_0, m, a を用いて表せ。

2-4. 粒子はポテンシャル障壁により散乱されるため、透過率 T は通常 1 より小さくなる。しかし、エネルギー E がある条件を満たすとき $T = 1$ となる。 $x = 0, a$ での波動関数の接続条件を考え、 $T = 1$ となるために E が満たすべき条件を \hbar, V_0, m, a を用いて表せ。

2-5. 透過率 $T = 1$ のとき、領域 II での粒子の波長 λ を a, n を用いて表せ。

問題 IV

以下の問 1 から問 2 までの全ての設問に答えよ。

問 1 N 個の微視的状态 j をもち、そのエネルギー ϵ_j ($j = 1, \dots, N$) が

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_n < \epsilon_{n+1} < \epsilon_{n+2} < \dots < \epsilon_N$$

で与えられる系を考える。(基底状態が n 重に縮退している)

この系が温度 T の熱平衡状態にあるとき、カノニカル分布の方法を用いて以下の設問に答えよ。ただし、 $\beta = \frac{1}{k_B T}$ であり、 k_B は Boltzmann 定数をあらわす。

1-1. この系の分配関数 $Z(T)$ を $\{\epsilon_j\}$ を用いて表し、状態 j の実現確率 p_j を求めよ。

1-2. この系の平均エネルギー $E(T)$ が $E(T) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z$ で与えられることを示せ。

1-3. $T \rightarrow 0$ および $T \rightarrow \infty$ での平均エネルギー $E(T)$ を $\{\epsilon_j\}$ を用いて表せ。

1-4. この系の Helmholtz の自由エネルギー $F(T)$ 、エントロピー $S(T)$ を $\{\epsilon_j\}$ を用いて表せ。

1-5. $T \rightarrow 0$ および $T \rightarrow \infty$ でのエントロピー $S(T)$ の値を求めよ。

(問 2 は次頁)

問 2 体積 V の容器内に N 個の同種分子からなる気体が閉じ込められており、温度 T の熱平衡状態にある。圧力を P とすると、この気体の状態方程式は

$$P = \frac{Nk_B T}{V - Nb} - \frac{aN^2}{V^2}$$

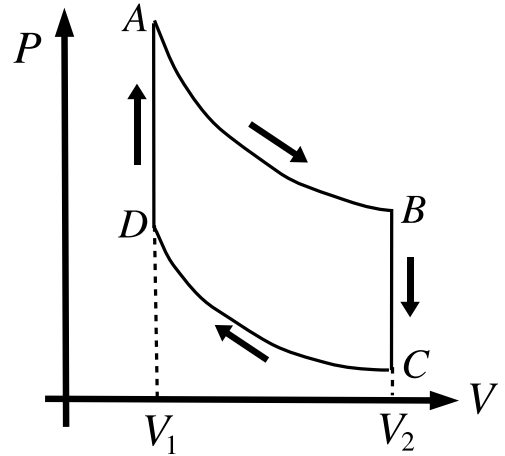
であり、内部エネルギー U は以下の様に与えられる。

$$U(T, V) = \frac{3Nk_B T}{2} - \frac{aN^2}{V}$$

ここで a, b は正の定数であり、 $V > Nb$ を満たす。

また、 k_B は Boltzmann 定数である。

この気体を作業物質として上図の熱力学サイクルで表される熱機関を考える。 $A \rightarrow B$ は温度 T_h の高温熱浴を接触させて気体の体積を V_1 から V_2 ($> V_1$) まで変化させる準静的等温過程であり、 B では高温熱浴を温度 T_c ($< T_h$) の低温熱浴に取り替え、体積を V_2 に固定して平衡状態 C になるまで待つ。 $C \rightarrow D$ は温度 T_c の低温熱浴を接触させて気体の体積を V_2 から V_1 まで変化させる準静的等温過程であり、 D では低温熱浴を温度 T_h の高温熱浴に取り替え、体積を V_1 に固定して平衡状態 A になるまで待つ。このサイクル中、気体は常に臨界温度以上で、 $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T < 0$ が成立しているものとする。この熱機関について以下の設問に答えよ。



2-1. 過程 $D \rightarrow A$ で、高温熱浴から気体に流入した熱 $Q_{D \rightarrow A}$ を求めよ。

2-2. 過程 $A \rightarrow B$ で、気体が外部にした仕事 $W_{A \rightarrow B}$ を求めよ。

2-3. 過程 $A \rightarrow B$ で、高温熱浴から気体に流入した熱 $Q_{A \rightarrow B}$ を求めよ。

2-4. 1 サイクルで高温熱浴から気体に流入した熱を Q_h 、気体が外部にした正味の仕事を W とすると、熱機関の効率は一般に $\eta = \frac{W}{Q_h}$ で定義される。この熱機関の効率を V_1, V_2, T_h, T_c を用いて表し、それが Carnot 効率 $1 - \frac{T_c}{T_h}$ より小さいことを計算により示せ。

問題 V

以下の問 1 から問 3 までの全ての設問に答えよ。解答にあたっては、結果だけでなく、導出過程についても記すこと。

問 1 次の対称行列について、以下の問に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1-1. 固有値と、規格化された固有ベクトルを全て求めよ。

1-2. 行列 A^2 の固有値を全て求めよ。

問 2 微分方程式に関する以下の設問に答えよ。

2-1. 微分方程式 $\frac{dy}{dx} + 5y = 0$ の一般解を求めよ。

2-2. 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = 12xy$ の一般解を求めよ。

2-3. 微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$ の一般解を求めよ。

2-4. 全微分方程式 $(x + y + 4)dx + (x - y^2 + 6)dy = 0$ が完全微分形である事を示し、一般解を求めよ。

問 3 平面 $4x + 2y + z = 4$ が座標軸と交わる 3 点を結ぶ線分で囲まれた三角形の領域 S を考える。

このとき、 $\phi(x, y, z) = 4x + 4y + z$ の三角形 S 上での積分

$$\int_S dS \phi(x, y, z)$$

を求めよ。ここで、 $\int_S dS$ は領域 S での面積分を表わす。

問題 VI

以下の問 1 の設問に答えよ。解答にあたっては、結果だけでなく、導出過程についても記すこと。

問 1 地球など多くの惑星には、大気の一部が太陽放射によって電離された電離圏と呼ばれる領域が存在する。中性の気体原子、分子からなる中性大気は、高度とともに密度が指数関数的に減少するのに対して、電離によって生成するイオンは、ある高度において生成率が最大となる特徴がある。以下では、温度と重力加速度は高度に対して一定と仮定し、問に答えよ。

1-1. まず、中性大気について考える。高度 z における中性大気の圧力を p とし、それよりも dz だけ高い高度 $z + dz$ における圧力を $p + dp$ とする。圧力差 dp は、高度 z と $z + dz$ の間にある中性大気に働く重力に等しいので、 $dp = -mngdz$ と表せる。ここで m は中性大気の平均分子量、 n は中性大気の数密度、 g は重力加速度である。 k をボルツマン定数、 T を絶対温度とし、理想気体の状態方程式を用いることで、 $\frac{dp}{p} = -\frac{mg}{kT}dz$ となることを示せ。

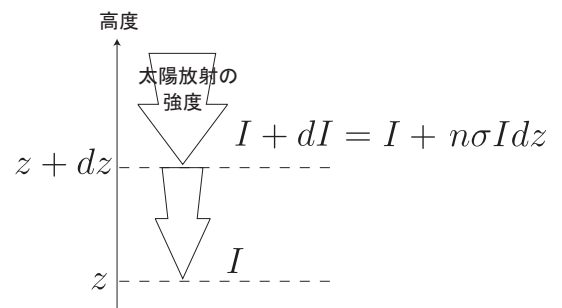
1-2. 高度 $z = 0$ の地表面における中性大気の圧力を p_0 とすると、高度 z における圧力 p は $p = p_0 \exp\left\{-\frac{mgz}{kT}\right\}$ となることを示せ。

1-3. $\frac{kT}{mg}$ は長さの次元を持つ、スケールハイトと呼ばれる量である。中性大気の数密度 n を高度 z とスケールハイト $H = \frac{kT}{mg}$ を用いて示せ。ただし、高度 $z = 0$ の地表面における中性大気の数密度を n_0 とする。

1-4. 次に中性大気の電離について考える。太陽放射は上方から垂直に入射するとし、電離にかかわる太陽放射の強度を I 、中性大気の数密度を n 、平均電離断面積を σ とする。このとき、下図に示すように高度が dz だけ下がると、太陽放射の強度は $n\sigma Idz$ だけ減少する。

ここで、電離断面積は太陽放射による中性大気の電離確率を表す物理量であり、面積の次元をもつ。大気圏外から入射する太陽放射の強度を I_∞ としたときに、ある高度 z における放射強度 I が $I = I_\infty \exp(-n\sigma H)$ となることを示せ。

(次頁につづく)

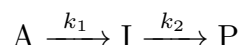


- 1-5. 太陽放射によって中性大気が電離され、イオンが生成する電離生成率は $q = n\sigma I$ と表せる。 q を高度 z の関数として示せ。
- 1-6. 中性大気の上端では中性大気の数密度が低いため、電離生成率は低くなる。一方で、高度が低くなるほど太陽放射が弱くなるため、電離生成率が低くなる。したがって、電離生成率はある高度で極大を持つ。 $\frac{dq}{dz} = 0$ となる高度 z_m を求めよ。

問題 VII

以下の問 1 から問 2 までの全ての設問に答えよ。

問 1 反応物 A から中間体 I が生じ、生成物 P が生成される、以下の様な逐次反応を考える。



ここで、 k_1 および k_2 は二つの一次反応の速度定数を表している。以下では、時刻 t における A, I, P の濃度をそれぞれ $[A]$, $[I]$, $[P]$ とする。また、時刻 $t = 0$ における A の初濃度を $[A]_0$ とする。

1-1. $[A]$, $[I]$, $[P]$ の時間変化 $\frac{d[A]}{dt}$, $\frac{d[I]}{dt}$, $\frac{d[P]}{dt}$ を化学種の濃度と速度定数を用いて表せ。

1-2. $k_1 \ll k_2$ の時には $[I]$ が十分に小さいため、定常状態近似 $\frac{d[I]}{dt} \simeq 0$ を用いることができる。この時、 $[I]$ および $\frac{d[P]}{dt}$ はどの様に表されるか示せ。

1-2 では定常状態近似を用いて $[I]$ および $\frac{d[P]}{dt}$ を求めたが、以下では $[A]$, $[I]$, $[P]$ の厳密解を求める。

1-3. 1-1 で求めた $\frac{d[A]}{dt}$ に関する式を、時間 0 から t まで、および濃度 $[A]_0$ から $[A]$ まで積分して、 $[A]$ を t の関数として求めよ。

1-4. 次に、1-1 で求めた $\frac{d[I]}{dt}$ に関する式に 1-3 で得られた $[A]$ の表式を代入し、時間 0 から t まで、および濃度 $[A]_0$ から $[A]$ まで積分すると、

$$[I] = \frac{k_1[A]_0}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$$

と表せることを導け。ただし、時間 $t = 0$ における I の初濃度 $[I]_0 = 0$ の条件、および次の微分方程式の公式を用いてもよい。

(公式) a と b を x の関数、もしくは定数としたとき、関数 $F(x)$ についての微分方程式 $\frac{dF}{dx} + aF = b$ の解は以下で与えられる。

$$F e^{\int a dx} = \int e^{\int a dx} b dx + c, \quad (\text{ただし } c \text{ は定数})$$

(次頁に続く)

- 1-5. 次に、 $[P]$ が t のどのような関数として表されるかを求める。1-1 で得た $\frac{d[P]}{dt}$ に関する微分方程式を直接計算することもできるが、濃度の間にはいつでも $[A] + [I] + [P] = [A]_0$ の関係があることに着目すると、より簡単に計算できる。 $[P] = [A]_0 - [A] - [I]$ より、 $[P]$ と t の関係を求めよ。
- 1-6. $k_1 \ll k_2$ の時には、 $[P]$ と t の関係はどの様に近似できるかを求めよ。ただし、 $0 < x \ll y$ の場合、 $ye^{-x} - xe^{-y} \simeq ye^{-x}$ と近似できることを用いても良い。また、 $k_1 \ll k_2$ の時には、 $\frac{d[P]}{dt}$ がどのような速度定数で表されるのか述べよ。さらに、1-2 で定常状態近似を用いて得られた $\frac{d[P]}{dt}$ と比較することで、定常状態近似が妥当であることを示せ。

(問 2 は次項)

問 2 化学ポテンシャル μ と絶対温度 T の関係は、一般に $\mu = h - sT$ と表せる。ここで、 h と s は原子・分子 1 個あたりのエンタルピーおよびエントロピーを表わす。

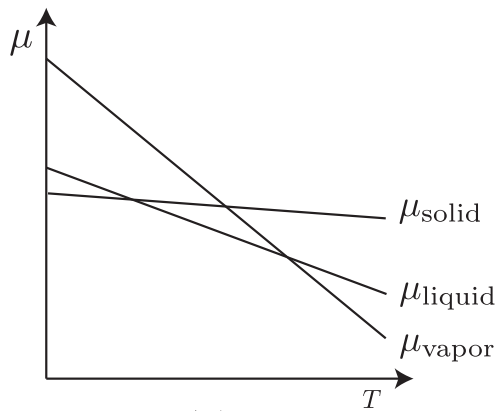


図 1

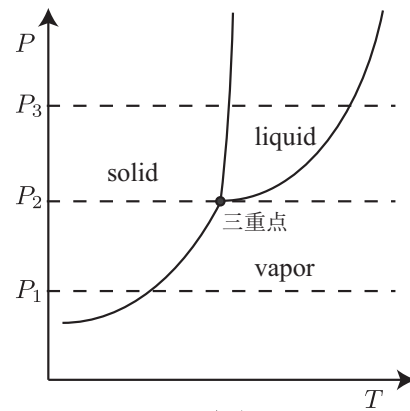


図 2

2-1. 図 1 には、ある物質が、一定の圧力下で固相、液相、気相であるときの化学ポテンシャル μ_{solid} , μ_{liquid} , μ_{vapor} と温度 T の関係を示してある。この図から、最安定な相が温度上昇に伴い、固相から液相、液相から気相へと変化することが分かる。

図 1 から、 h_{solid} , h_{liquid} , h_{vapor} の大小関係と s_{solid} , s_{liquid} , s_{vapor} の大小関係を読み取り示せ。

2-2. ナフタレンのように、固相中および液相中での分子間相互作用が小さい物質の場合には、温度上昇に伴い、固相は液相を経ずに直接気相となる。この現象は昇華と呼ばれる。その場合には、化学ポテンシャルはどのように温度変化をするであろうか。原子・分子の間に働く相互作用が小さいほど、エンタルピーの値が大きくなることに注意し、解答用紙 [問題 VII 問 2 作図用 (a)] に μ_{solid} および μ_{liquid} と温度 T の関係を図示せよ。

2-3. 固相、液相、気相の平衡関係は、一般に図 2 の様に表される。図中の曲線上では、それぞれ隣り合った 2 相が平衡となる。また、固相、液相、気相の 3 相が共存する点は三重点とよばれる。圧力 P_1 , P_2 , P_3 の場合の気相の化学ポテンシャル μ_{vapor} と温度 T との関係を解答用紙 [問題 VII 問 2 作図用 (b)] にそれぞれ図示せよ。ただし、 μ_{solid} , μ_{liquid} および h_{vapor} の圧力変化は無視できるものとする。

2-4. 液体に不揮発性の溶質が溶け込むと、液体の凝固点は下がり、沸点は上がる。この現象は、溶け込む溶質の種類にはよらないため、モル凝固点降下およびモル沸点上昇と呼ばれている。

解答用紙 [問題 VII 問 2 作図用 (c)] には、溶質を溶解させる前の溶媒物質の化学ポテンシャルと温度の関係を図示してある。ここに、溶質を溶解させた後の液体の μ_{liquid} と温度 T の関係を作図せよ。また、作図した μ_{liquid} と温度 T の関係を用いて、モル凝固点降下およびモル沸点上昇がなぜ起こるのかを説明せよ。ただし、液体に溶質が溶け込んでも、 h_{liquid} は変化しないものとする。