

(平成 27 年 8 月 17 日実施)

平成 28 年度

北海道大学大学院理学院 物性物理学専攻・宇宙理学専攻 修士（博士前期）課程入学試験 専門科目問題（午後）

受験に関する注意

- 試験時間： 13:00～15:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者（宇宙理学専攻を併願する者を含む）：問題 III, IV を解答すること。
- 宇宙理学専攻志望者：
 - － 宇宙物理学・素粒子論・原子核理論・情報メディア科学・原子核反応データ科学を志望するものは問題 III, IV を解答すること。
 - － 理論惑星科学・惑星宇宙グループ・宇宙物質科学・相転移ダイナミクス・飛翔体観測を志望するものは問題 III, IV, V, VI, VII の中から 2 つの問題を選択して解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 III	3 枚
	問題 IV	2 枚
	問題 V	2 枚
	問題 VI	3 枚
	問題 VII	2 枚
解答紙	2 問題分	6 枚（各問題 3 枚）
草案紙	2 問題分	2 枚（各問題 1 枚）

問題 III

問 1 質量 m をもつ粒子が図 1 のような 1 次元井戸型ポテンシャル $V(x)$ 中にある。このときの束縛状態について、以下の問いに答えなさい。ただし、 \hbar はプランク定数である。

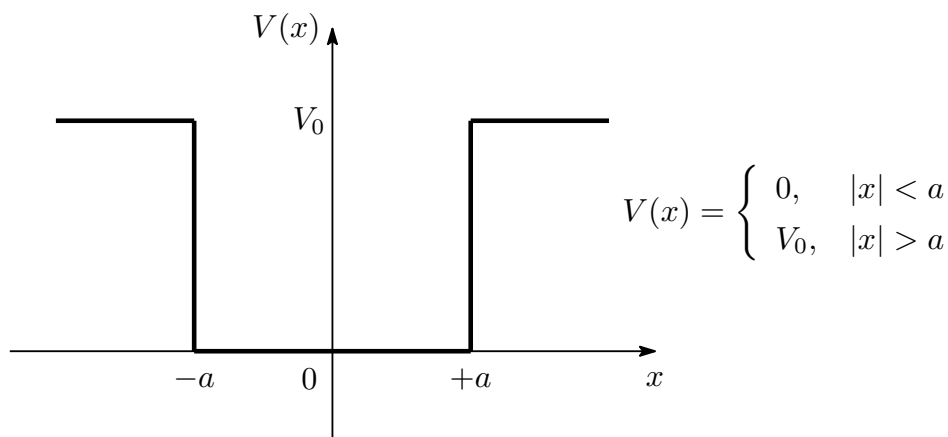


図 1

- 1-1. 束縛状態のエネルギー固有値 E は縮退していないことを示しなさい。
 1-2. 束縛状態では、エネルギー固有関数 $\phi(x)$ は必ず偶関数か奇関数のどちらかであることを示しなさい。

以下では、エネルギー固有関数 $\phi(x)$ が偶関数である場合を考える。

1-3. 図 1 のポテンシャルに対するシュレーディンガー方程式を、束縛状態の場合に $|x| < a$ 、 $x < -a$ 、 $x > a$ の 3 領域に分けて解き、 $x = \pm a$ と $x \rightarrow \pm\infty$ での $\phi(x)$ の境界条件を用いてエネルギー固有値 E が満たさなければならない条件が $\alpha = \sqrt{2mE}/\hbar$ と $\beta = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$ を使って次のように表されることを示しなさい。

$$\beta = \alpha \tan \alpha a$$

- 1-4. V_0 がある条件を満たすとき、偶関数の固有関数をもつエネルギー固有状態の数は 1 つに限られる。 $\xi = \alpha a$ 、 $\eta = \beta a$ と置いて 1-3. の結果を使い、この条件を答えなさい。
 1-5. 井戸が浅く、 $0 < V_0 \ll \hbar^2/ma^2$ であるとき、束縛状態のエネルギー固有値 E は無次元パラメータ $\lambda = V_0 ma^2/\hbar^2$ について、以下のようなべき級数の形で求めることが出来る。

$$E = \frac{\hbar^2}{ma^2} (\lambda C_1 + \lambda^2 C_2 + \lambda^3 C_3 + \dots)$$

C_n は無次元の定数である。 C_1 と C_2 を求めなさい。

問 2 2 原子分子を剛体として扱い、電場中のエネルギー準位を考察しよう。分子が電気双極子モーメント \mathbf{p} をもっているとき、一様電場 \mathcal{E} 中の分子の回転運動に関するハミルトニアンは、次のように書ける。

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1, \quad (1)$$

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2I} \mathbf{L}^2, \quad \mathcal{H}_1 = -p\mathcal{E} \cos \theta \quad (2)$$

ただし、電場は z 軸正方向を向いているものとし、 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) は電場方向と電気双極子ベクトルの方向がなす角度である。また、簡単のため、分子は電気双極子ベクトルに垂直な軸のまわりの回転のみを行うものとしており、 $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$ は角運動量演算子、 I は慣性モーメントである。以下の問いに答えなさい。

2-1. 角運動量演算子の交換関係は、

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z, \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x, \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y$$

である。これを使って、 \mathbf{L}^2 と L_z 、および \mathcal{H}_0 が同時対角化できることを示しなさい。

\mathbf{L}^2 と L_z の固有値はそれぞれ $\ell(\ell + 1)\hbar^2$ 、 $m\hbar$ である。ただし、 $\ell = 0, 1, 2, \dots$ 、かつ、 $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$ であり、それらの同時固有ベクトルを $|\ell, m\rangle$ と書くことにする。

2-2. $\langle \ell', m' | \mathcal{H}_1 | \ell, m \rangle \neq 0$ が成り立つために、 m と m' が満たさなければならない必要条件を理由とともに答えなさい。

また、 $\langle \ell', m' | \mathcal{H}_1 | \ell, m \rangle \neq 0$ が成り立つために ℓ と ℓ' が満たさなければならない条件は、 $\ell' = \ell \pm 1$ であることが示せる。以下の 2-4. ではこの結果を使ってよい。

2-3. 一般に、ハミルトニアンが λ を微小な定数として $H = H_0 + \lambda H_1$ という形をしている場合に、 H の固有値を摂動論を用いて求めよう。非摂動ハミルトニアン H_0 の規格化された固有状態が $|\phi_k^{(0)}\rangle$ であり、エネルギー固有値が $E_k^{(0)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) であるとき、 H の固有状態と固有値をそれぞれ

$$\begin{aligned} |\phi_n\rangle &= |\phi_n^{(0)}\rangle + \lambda |\phi_n^{(1)}\rangle + \lambda^2 |\phi_n^{(2)}\rangle + \dots, \\ E_n &= E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots \end{aligned}$$

のように λ のべき級数に展開する。 $E_n^{(1)}$ 、 $|\phi_n^{(1)}\rangle$ を $E_k^{(0)}$ と $|\phi_k^{(0)}\rangle$ によって具体的に表しなさい。ただし、非摂動の固有値 $E_k^{(0)}$ に縮退はないものとする。また、 $|\phi_n\rangle$ は λ の 1 次までの精度で規格化しなさい。

2-4. (1) 式のハミルトニアン \mathcal{H} に対し、 m の値が一定の状態 $\{|\ell, m\rangle; \ell = |m|, |m| + 1, |m| + 2, \dots\}$ のみからなる部分空間 V_m を考え、この部分空間内で、 \mathcal{H}_0 の非摂動固有状態

$|\phi^{(0)}\rangle = |\ell, m\rangle$ からの \mathcal{H}_1 による摂動を計算しよう。**2-3.**の結果を使って、2次摂動までの精度で \mathcal{H} の固有値 $E_{\ell m} = E_{\ell m}^{(0)} + E_{\ell m}^{(1)} + E_{\ell m}^{(2)}$ を計算しなさい。

ただし、**2-3.**のエネルギー固有値の2次の摂動は次式で与えられることを使ってよい。

$$E_n^{(2)} = \langle \phi_n^{(0)} | H_1 | \phi_n^{(1)} \rangle$$

また、必要なら以下の結果も使ってよい。

$$\langle \ell, m | \cos \theta | \ell - 1, m \rangle = \langle \ell - 1, m | \cos \theta | \ell, m \rangle = \left(\frac{\ell^2 - m^2}{4\ell^2 - 1} \right)^{1/2}$$

問題 IV

問 1 図 1 のような、2つの定積過程と2つの等圧過程からなる、 n モルの理想気体の準静的熱サイクルを考える。以下の問いに答えよ。

1-1. これは熱機関（例：エンジン）、冷凍機（例：ヒートポンプ）のいずれか。答えの理由も簡潔に述べよ。

1-2. 図 1 の (1)~(4) の矢印の過程が、それぞれ次のどちらに属するか答えよ。

- a) 熱量が流入する過程
- b) 熱量が流出する過程

1-3. (1)~(4) のそれぞれの過程において、理想気体の得る熱量 Q_i ($i = 1 \sim 4$) の値を、定積モル比熱 C_V 、モル数 n 、気体定数 R 、圧力 P_1 、 P_2 、体積 V_1 、 V_2 を用いて表せ。

1-4. この熱サイクルの効率 η を 1-3. で与えた物理量を用いて表せ。

1-5. 理想気体が2原子分子からなり、 $P_2 = 2P_1$ 、 $V_2 = 2V_1$ の場合を考える。このとき、熱サイクルの効率は、 $T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR}$ と $T_2 = \frac{P_2 V_2}{nR}$ の間で作動する理論上のカルノーサイクルの効率と比べて何%になるか求めなさい。

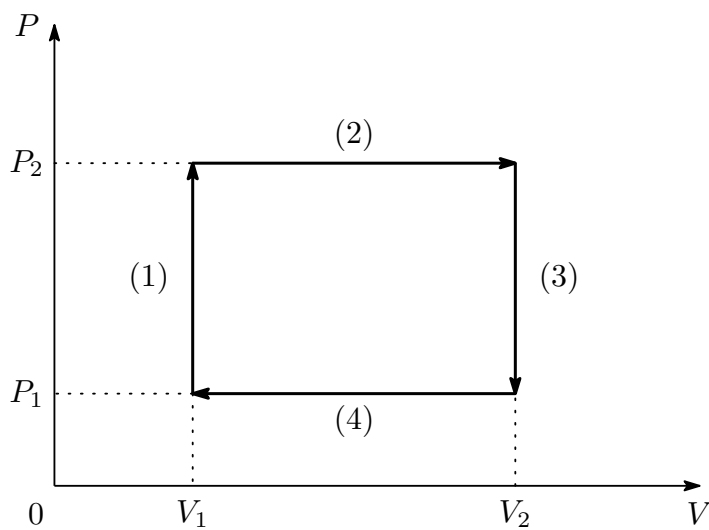


図 1

問 2 一つの原子が2つの離散的エネルギー準位のみをとる「2準位系」を考える。基底状態のエネルギーを $E = 0$ 、励起状態のエネルギーを $E = \Delta$ とする。また、基底状態は縮重度 g_1 、励起状態は縮重度 g_2 とする。このとき、ボルツマン定数を k_B とし、以下の問いに答えよ。

2-1. 温度 T における、系の自由エネルギーを求めよ。但し、ボルツマン統計を用い、 $\beta = \frac{1}{k_B T}$ とおくこと。

2-2. 温度 T における、系のエントロピーを求め、 $T \rightarrow \infty$ での値を求めよ。

2-3. 温度 T における、系の比熱を求めよ。

2-4. 2-3. の比熱の温度依存性には、ショットキー異常と呼ばれる特徴的な振る舞いが現れる。縦軸を比熱、横軸を $\frac{k_B T}{\Delta}$ とした場合の比熱の温度依存性のグラフの概形を描きなさい。

問題 V

以下の設問に答えよ。解答にあたっては結果だけでなく、導出過程についても記すこと。

問 1 以下の設問に答えよ。

1-1. 微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0$ の一般解を求めよ。

1-2. 微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 5y = 0$ の一般解を求めよ。

1-3. 微分方程式 $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = 0$ の解のうち、 $y(1) = 0$ 満たすものを xy 平面上に図示せよ。

問 2 \mathbf{r} を位置ベクトル、 S を原点 O を 含まない 閉曲面、 \mathbf{n} を S 上における外向き法線ベクトルとするとき、以下を求めよ。ここで、 S で囲まれた領域とその体積は V とせよ。3-3. ではガウスの定理を用いてもよい。

2-1. $\nabla \cdot \mathbf{r}$

2-2. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{r})$

2-3. $\iint_S \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \cdot \mathbf{n} dS$

問 3 a を $0 < a < 1$ を満たす実定数とする。このとき、以下の設問に答えよ。

3-1. 複素数 z の関数 $f(z)$ が

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z/a + 1}$$

で与えられるとき、 $f(z)$ の全ての極の位置と、各極での留数を求めよ。

3-2. $z = e^{i\theta}$ とすると $\cos \theta = (z + z^{-1})/2$ であることと前問の結果を利用して、以下の積分値を求めよ。

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos \theta}$$

問 4 ルジャンドル多項式 $P_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) について、以下の設問に答えよ。

4-1. ルジャンドル多項式の母関数 (生成関数) は

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

で与えられる。この式を微分することで、以下 2 つの漸化式が成り立つことを示せ。

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x),$$
$$\frac{dP_{n+1}(x)}{dx} + \frac{dP_{n-1}(x)}{dx} = 2x\frac{dP_n(x)}{dx} + P_n(x)$$

4-2. 前問の結果を利用して、以下の微分方程式が成り立つことを示せ。

$$(1-x^2)\frac{d^2P_n(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1)P_n(x) = 0$$

問題 VI

以下の問 1 および問 2 の設問に解答せよ。解答用紙には問題番号を明記すること。

問 1 地球内部には図 1 に示すように層構造が存在すると考えられている。以下の設問に解答せよ。

1-1. 図 1 に示した層のうち、外核は流体であると推定されている。その理由に関して、観測事実を挙げて説明せよ。

1-2. 内核と外核の主成分を答えよ。また、その主成分を内核と外核に濃縮させたと考えられている過程を説明せよ。

1-3. 地殻に存在する大陸は移動していると考えられている。大陸あるいは地殻が移動している、もしくは移動したことを示す地質学的な証拠を 2 つ挙げて、それぞれについて説明せよ。

1-4. 本問と次の 1-5 では、図 2 に示すようにマンツルの上下境界はともに平面であると単純化して考えることにする。

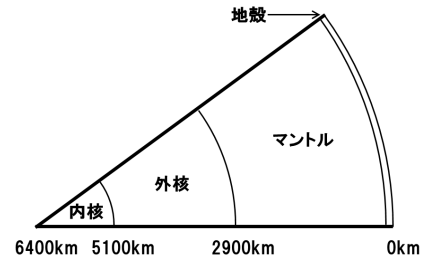


図 1. 地球の層構造。下段の数値は地表面からの深さを表す。

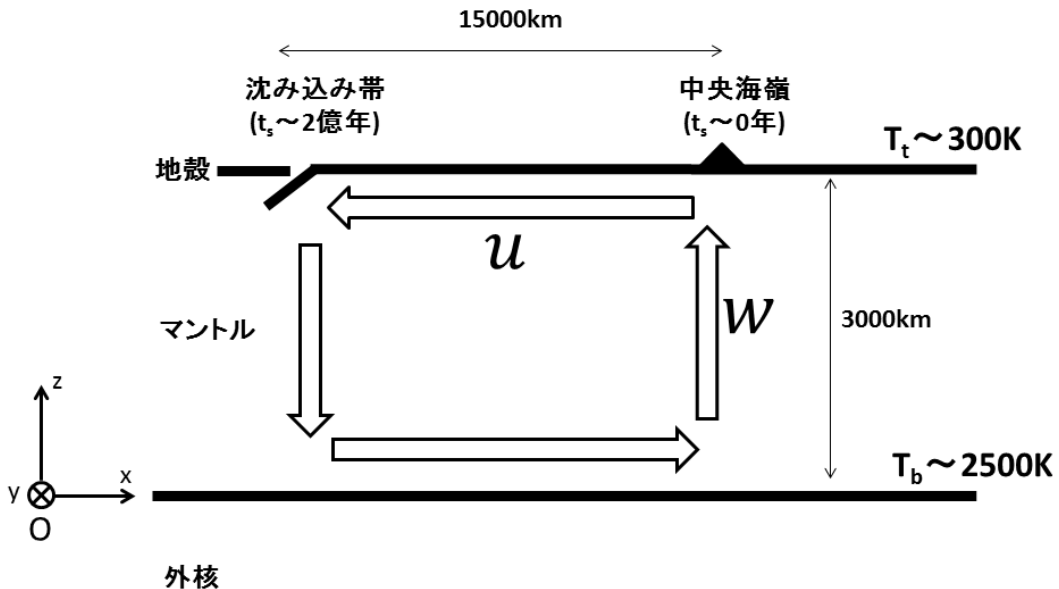


図 2： マンツルを単純化したモデル。右端に示した T_t と T_b は、上下の境界面における温度の値を示す (1-4 で使用)。水平スケールとして太平洋域を想定した値を示す。太矢印はマンツルの中の流れを示す (1-5 で使用)。図の上方にある t_s は海洋底岩石のおおよその年代をあらわす。

本問では、マンツルと地殻における熱輸送は熱伝導のみで起きている仮想的な状況を考える。

この場合における地表面熱フラックスに関して、以下の手順 (a) から (c) に従って考察を行え。

(a) 下部境界 (外核・マントル境界) 上に原点 O を持つ直交直線座標 (x, y, z) をとり (図 2 の左下)、熱伝導方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho C} \Delta T \quad (3)$$

を考える。ここで、 k は熱伝導率、 ρ は密度、 C は比熱、 Δ はラプラス作用素 (ラプラシアン) である。温度分布は定常かつ水平方向には一様であると仮定して、式 (1) を解きマントルと地殻の温度の鉛直分布を表す式を求めよ。ただし、上部境界 (地表面) における温度 T_t と下部境界における温度 T_b はそれぞれ一定値に固定されているものと考えよ。

(b) 式 (1) の解を用いて、地表面における熱フラックスを有効数字 1 桁で見積もれ。その際、 $k = 4 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ 、および図 2 に示されている T_t と T_b の値を用いよ。

(c) 上の計算で求めた熱フラックスの値は現実のマントルにおける熱フラックスの値よりも大きくなっているはずか、小さくなっているはずか、どちらであるか答えよ。また、その理由もあわせて示せ。

1-5. マントル中の流れを単純化して、図 2 の太矢印 (u, w) に示す定常かつ矩形形状の流れを考えることにする。以下の手順 (a) から (c) に従って、この流れが 1 周する時間スケールをおおまかに見積もれ。

(a) 地殻の移動速度はマントル中の水平速度 u に等しいと仮定して、 u を m sec^{-1} 単位で見積もれ。図 2 に示された数値を用いて有効数字 1 桁で求めよ。

(b) 図に示した流れは (x, z) 平面内で閉じていると仮定して、連続の式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

から得られるバランスを利用して鉛直速度 w の大きさを見積もれ。

(c) 上の結果を用いて、図 2 の矩形形状の流れが 1 週する時間スケールを、年単位で見積もれ。

問 2 以下の 2-1 から 2-8 までの中から 2 つ を選び、解答せよ。1 問につき 300 字程度で解答せよ。必要に応じて図を用いても良い。

- 2-1. 傾圧不安定とはどのようなものか説明せよ。また、傾圧不安定によって生じる現象、その現象が気候の形成に果たしている役割について論じよ。
- 2-2. ENSO サイクルとは何か、どのように生じるものか説明せよ。また、ENSO サイクルが気象に与える影響についても述べよ。
- 2-3. ミランコビッチサイクルとは何か説明せよ。ミランコビッチサイクルによってもたらされると考えられる現象についても論じよ。
- 2-4. 地球磁気圏はどのような構造を持っているか、その形成メカニズムはどのようなものかを説明せよ。
- 2-5. 人工衛星を用いた地球の観測について 1 つ例を挙げて、その観測対象、観測原理、重要性について説明せよ。
- 2-6. 太陽系はどのように形成されたと考えられているか、説明せよ。太陽系の形成理論に関する観測的証拠についても説明せよ。
- 2-7. 隕石の種類とそれぞれの種類の特徴を説明せよ。また隕石研究の重要性について論じよ。
- 2-8. 放射年代測定法の原理およびその応用例を説明せよ。

問題 VII

問 1 固体表面に気体分子が吸着する反応について考える。式 (1) に示したように、気体分子 A は固体表面の吸着座 σ と吸着・脱離を繰り返す。



時間 t における、固体表面の吸着座のうち既に吸着されているものの割合（吸着率）を θ とする ($0 \leq \theta \leq 1$)。また、吸着反応と離脱反応の速度定数をそれぞれ k_{ad} および k_{des} とし、気体分子 A の圧力を P とする。ただし簡単のため、次の 5 点を仮定する。

仮定 \boxtimes 固体表面上の吸着座の活性は均一である。

仮定 \boxtimes 吸着熱は θ によって変わらない。

仮定 \boxtimes 吸着分子間の相互作用は無視できる。

仮定 \boxtimes 吸着は単分子層でおこる。

過程 \boxtimes 気体分子は十分な量だけ存在するため、 P は一定とみなせる。

1-1. θ の時間依存性は、式 (2) で表される。

$$\frac{d\theta}{dt} = k_{ad}P(1 - \theta) - k_{des}\theta \quad (6)$$

十分時間が経ち、吸着が平衡に達した場合の θ を求めよ。

1-2. P が十分に小さい場合に、平衡状態における θ はどのように近似されるか答えよ。

1-3. P が十分に大きい場合に、平衡状態における θ はどのように近似されるか答えよ。

1-4. 次に、吸着が平衡に達する前の過渡的な状態について考える。式 (2) の微分方程式を解き、 θ を t の関数として表せ。ただし、 $t = 0$ の時には $\theta = 0$ とする。

1-5. 1-4. の解を用いて、十分に長い時間が経った後の θ を求めよ。

1-6. 1-4. の解を用いて、 $t = 0$ における吸着初速度 $\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{t=0}$ を求めよ。

問 2 固相 (S)、液相 (L)、気相 (V) の間の平衡関係は、一般に図 1 (圧力-温度相図) のように表される。 P は圧力、 T は温度を示す。図中の曲線上では、それぞれ隣り合った 2 相が互いに平衡となるため、2 相の化学ポテンシャル μ は互いに等しい。

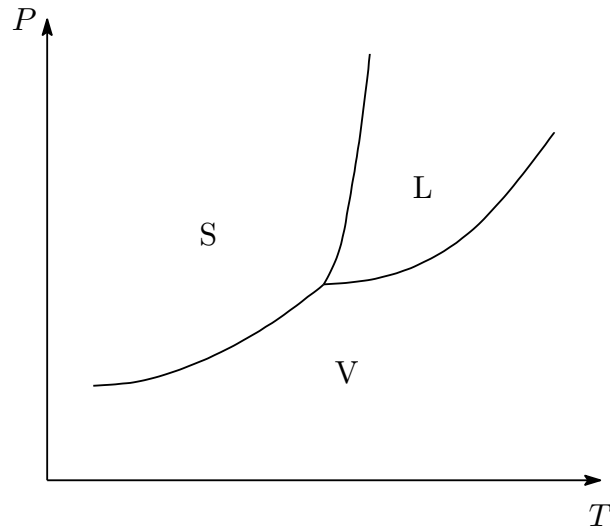


図 1

- 2-1. 固相と液相が平衡を保ったまま、 P と T の両方が固液平衡曲線上で微小量だけ変化した場合を考える。固相と液相の化学ポテンシャル (それぞれ μ_S と μ_L) の変化量 $d\mu_S$ と $d\mu_L$ を部分モル状態量を用いて表せ。ただし、ギブス自由エネルギーの変化量 (dG) は、体積 (V) とエントロピー (S) を用いて、一般に $dG = VdP - SdT$ と表される。また、固相と液相の部分モル体積を $v_S \equiv \partial V_S / \partial N$ および $v_L \equiv \partial V_L / \partial N$ とし、固相と液相の部分モルエントロピーを $s_S \equiv \partial S_S / \partial N$ および $s_L \equiv \partial S_L / \partial N$ とする (ただし、 N はモル数を表す)。
- 2-2. 固液平衡曲線上では μ_S と μ_L は等しいため、微小変化に伴う $d\mu_S$ と $d\mu_L$ も等しい。この関係を利用して、固液平衡曲線の傾き dP/dT を求めよ (Clapeyron の式と呼ばれる)。ただし、固相から液相へ相転移する際の、部分モル体積変化を Δv_{SL} 、部分モルエントロピー変化を Δs_{SL} とする。
- 2-3. 2-2. で求めた dP/dT を、部分モルエンタルピー変化 (Δh_{SL}) を用いて表せ。
- 2-4. 図 1 において、固液平衡曲線よりも気液平衡曲線の方が緩やかな傾きを示す理由を説明せよ。ただし、通常蒸発エンタルピーは融解エンタルピーの数倍程度である。また、図中の気液平衡曲線は臨界圧力・温度よりも十分に低圧・低温の状態を示している。
- 2-5. 図 1 において、固液平衡曲線、気液平衡曲線、および固気平衡曲線が全て下に凸の形状を示す理由を説明せよ。
- 2-6. 水は一般の物質と比べて特異な性質を持つ。水の場合の圧力-温度相図を書き、なぜそのようになるのかを説明せよ。