

(平成 26 年 8 月 6 日実施)

平成 27 年度

北海道大学大学院理学院 物性物理学専攻・宇宙理学専攻 修士（博士前期）課程入学試験 専門科目問題（午後）

受験に関する注意

- 試験時間： 13:00～15:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者（宇宙理学専攻を併願する者を含む）：問題 III, IV を解答すること。
- 宇宙理学専攻志望者：
 - － 宇宙物理学・素粒子論・原子核理論・情報メディア科学・原子核反応データ科学を志望するものは問題 III, IV を解答すること。
 - － 理論惑星科学・惑星宇宙グループ・宇宙物質科学・相転移ダイナミクス・飛翔体観測を志望するものは問題 III, IV, V, VI, VII の中から 2 つの問題を選択して解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 III	2 枚
	問題 IV	2 枚
	問題 V	1 枚
	問題 VI	2 枚
	問題 VII	3 枚
解答紙	2 問題分	4 枚（各問題 2 枚）
草案紙	2 問題分	2 枚（各問題 1 枚）

問題 III

問 1 質量 m をもつ粒子の量子力学的な定常運動を考える。 $\hbar \equiv 1.054 \times 10^{-34} \text{J}\cdot\text{s}$ として、以下の問に答えよ。

1-1. 1次元調和振動子のハミルトニアン \hat{H} は、

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega$$

で与えられる。ここで、 \hat{x} は位置演算子、 \hat{p} は運動量演算子、また、 \hat{a}^\dagger と \hat{a} は

$$\hat{a} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}\hat{p}, \quad \hat{a}^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}\hat{p}$$

で定義された昇降演算子で、互いにエルミート共役である。昇降演算子による \hat{H} の表式を用いて、「規格化可能な状態空間における \hat{H} の固有値は正の値を取る」ことを示せ。また、「基底状態は $\hat{a}|0\rangle = 0$ を満たす状態 $|0\rangle$ で与えられる」ことを示せ。

1-2. $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ が成り立つことを用いて、 n を非負整数とする状態 $(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$ が \hat{H} の固有状態であることを示し、その固有値を求めよ。ただし、 $[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ である。

1-3. 2次元の等方的な調和振動子のハミルトニアン \hat{H} は、2次元直交座標の位置演算子 \hat{x}, \hat{y} と運動量演算子 \hat{p}_x, \hat{p}_y を用いて、

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)$$

で与えられる。エネルギー固有値とその縮重度を求めよ。

1-4. この粒子が電荷 q をもつ場合を考える。 z 方向に静磁場を加えたときのハミルトニアンは、磁場を表すベクトルポテンシャル $\hat{\vec{A}} = (\hat{A}_x, \hat{A}_y)$ を用いて、

$$\hat{H} = \frac{(\hat{p}_x - q\hat{A}_x)^2 + (\hat{p}_y - q\hat{A}_y)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)$$

で与えられる。ただし、粒子の運動は xy 平面内のみで行われ、 z 方向の運動については考える必要がないものとする。特に、大きさ B の一様な磁束密度がかかっている場合を考え、ベクトルポテンシャルを $\hat{\vec{A}} = (-\frac{1}{2}B\hat{y}, \frac{1}{2}B\hat{x})$ と選ぶと、上のハミルトニアンは、

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\omega^2 + \omega_L^2)(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) - \omega_L\hat{C}$$

と表すことができる。ここに現われた定数 ω_L と演算子 \hat{C} の表式を求め、 \hat{C} の物理的意味を説明せよ。

1-5. $j = x, y$ のそれぞれの方向に対して, 新たな昇降演算子

$$\hat{a}_j \equiv \sqrt{\frac{m\Omega}{2\hbar}} \hat{r}_j + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\Omega}} \hat{p}_j, \quad \hat{a}_j^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\Omega}{2\hbar}} \hat{r}_j - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\Omega}} \hat{p}_j$$

$$\Omega \equiv \sqrt{\omega^2 + \omega_L^2}, \quad \hat{r}_x \equiv \hat{x}, \quad \hat{r}_y \equiv \hat{y}$$

を導入し, さらに, それらを用いて, 演算子 \hat{a}_\pm を

$$\hat{a}_\pm \equiv \frac{\hat{a}_x \mp i\hat{a}_y}{\sqrt{2}}$$

により定義する。1-4 の \hat{C} を $\hat{a}_\pm, \hat{a}_\pm^\dagger$ を用いて表せ。

1-6. 1-4 のハミルトニアン固有値を求めよ。

1-7. 1-4 の \hat{H} に対応する古典運動として, 等速円運動が可能である。どのような等速円運動を行うかを調べよ。それに基づいて, 1-6 の結果について物理的解釈を与えよ。

問 2 プランク定数 $\hbar = 1.054 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$ を単位とする角運動量演算子 $\hat{J} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$ は, 交換関係

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hat{J}_z, \quad [\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hat{J}_x, \quad [\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hat{J}_y,$$

を満たす。ただし, $[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ である。また, $\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$ の固有値は, J を整数または半整数 ($J = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$) として, $J(J+1)$ という値に限られ, 対応する固有状態は, \hat{J}_z の固有値が $J, J-1, \dots, -(J-1), -J$ となる $2J+1$ 個の状態に分類される。 \hat{J}^2, \hat{J}_z の固有値がそれぞれ $J(J+1), M$ である状態の規格化された固有ケットを $|J, M\rangle$ と表し, J を「スピンの大きさ」と呼ぶことにする。次の問に答えよ。

2-1. 演算子 $\hat{J}_\pm \equiv \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$ と \hat{J}_z の交換関係 $[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm]$ を求めよ。また, $\hat{J}_+ \hat{J}_-$ と $\hat{J}_- \hat{J}_+$ を \hat{J}^2 と \hat{J}_z を用いて表せ。

2-2. 演算子 \hat{J}_\pm は, 状態ベクトルの位相を適当に選べば,

$$\hat{J}_\pm |J, M\rangle = \sqrt{(J \mp M)(J \pm M + 1)} |J, M \pm 1\rangle$$

を満たすことを示せ。

2-3. 粒子 1 と粒子 2 に対する角運動量演算子を \hat{J}_1, \hat{J}_2 とし, それらの大きさをそれぞれ J_1, J_2 で表す。この 2 粒子系が回転不変性を持つハミルトニアン \hat{H} で表されているとき, \hat{H} と \hat{J}_1, \hat{J}_2 は可換で, $[\hat{H}, \hat{J}_k] = 0$ ($k = 1, 2$) が成立する。この 2 粒子系に $\hat{H}' = a\hat{J}_1 \cdot \hat{J}_2$ という摂動が加わった。ただし, $a > 0$ は定数である。摂動により, 2 粒子系のエネルギー固有値がどのように変化するかを説明せよ。

2-4. 前問 2-3 において $J_1 = J_2 = 1$ の場合に, \hat{H}' の固有値とそれに対応する規格化された固有状態をすべて求めよ。ただし, 固有状態は $|M_1, M_2\rangle \equiv |J_1 = 1, M_1\rangle |J_2 = 1, M_2\rangle$ ($M_1 = -1, 0, 1, M_2 = -1, 0, 1$) を用いて表せ。

問題 IV

問 1 エネルギーが 0 と $\varepsilon (\geq 0)$ の 2 つの準位をもつ独立な原子 N 個から成る系を考える。以下の問に応えよ。(次の問 2 は、問 1 とは独立に解くことも可能である。)

1-1. N 個の原子のうち、 n 個がエネルギー準位 ε にあり、 $N - n$ 個がエネルギー準位 0 にあるものとする。ただし、 $N \gg 1, n \gg 1, N - n \gg 1$ である。対応する微視的状态数を数えることにより、系のエントロピー S が、変数 $x \equiv n/N$ の関数として、

$$S(x) = k_B N [-x \log x - (1 - x) \log(1 - x)]$$

と表されることを示せ。ただし、 k_B はボルツマン定数、 \log は自然対数を表し、また、原子は区別できるものとする。必要ならスターリングの公式 $\log N! = N \log N - N$ ($N \gg 1$) を使って良い。

1-2. この系を温度 T の平衡状態においたときの x の値が、

$$x(\varepsilon, T) = \frac{1}{e^{\varepsilon/k_B T} + 1}$$

となることを示せ。

1-3. この系を、温度 T を一定に保ったまま、原子のパラメータ ε を $\varepsilon = 0$ から $\varepsilon = \varepsilon_1$ まで準静的に変化させる等温過程を考える。系が状態 x にあるときのエネルギーは $Nx\varepsilon$ なので、この状態でパラメータを微小量 $d\varepsilon$ だけ変化させるのに必要な外部からの仕事は $dW = Nx d\varepsilon$ である。前問の結果を用いて dW を積分することにより、この準静的等温過程における 外部からの仕事 W が、

$$W = Nk_B T \log \frac{2}{1 + e^{-\varepsilon_1/k_B T}}$$

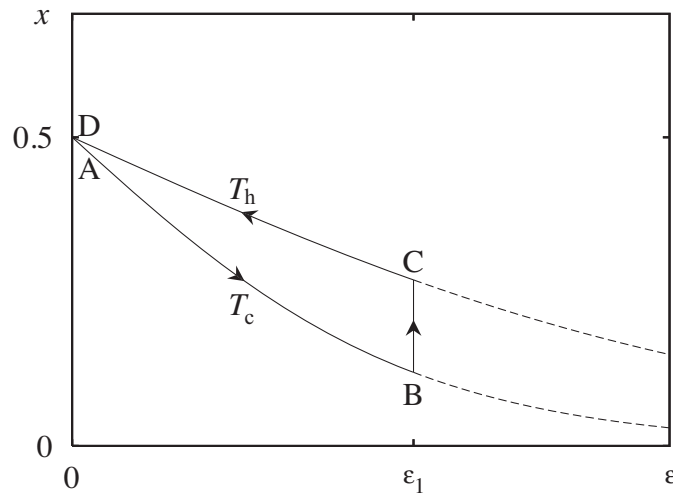
となることを示せ。

1-4. 前問 1-3 の準静的等温過程において、系に流入した熱量 Q を熱力学第一法則を使って求め、それが、上で求めた $S(x)$ と $x(\varepsilon, T)$ を使って、

$$Q = T [S(x(\varepsilon_1, T)) - S(x(0, T))]$$

と書けることを示せ。また、この Q の正負を判定せよ。

問2 問1の1-3と1-4で述べた準静的等温過程を利用して、下図のような循環過程からなる熱機関を考える。まず、初期に問1の系を $\varepsilon = 0$ 、温度 T_c の平衡状態（状態A）に用意し、温度 T_c の熱浴と接触させながら、パラメータ ε を準静的に $\varepsilon = \varepsilon_1$ （状態B）まで変化させる。次に、温度 T_c の熱浴を温度 $T_h (> T_c)$ の熱浴に瞬時に置き換え、系が $\varepsilon = \varepsilon_1$ 、温度 T_h の平衡状態（状態C）になるまで放置する。その後、温度 T_h の熱浴と接触させたまま、パラメータ ε を準静的に $\varepsilon = 0$ （状態D）まで変化させる。最後に、温度 T_h の熱浴を温度 T_c の熱浴に瞬時に置き換えて、系を最初の状態Aに戻す。以下の問に答えよ。



- 2-1. 過程 $B \rightarrow C$ では、外部との仕事のやり取りはない。このことを考慮して、過程 $B \rightarrow C$ で、温度 T_h の高温熱浴から系に流入した熱量 $Q_{B \rightarrow C}$ を求めよ。
- 2-2. この熱機関の1サイクルにおいて温度 T_h の高温熱浴から系に流入した熱量 Q_h は、過程 $C \rightarrow D$ で高温熱浴から系に流入した熱量を $Q_{C \rightarrow D}$ として、

$$Q_h = Q_{B \rightarrow C} + Q_{C \rightarrow D}$$

と表せる。この Q_h を求めよ。

- 2-3. この熱機関の1サイクルで外部にする仕事 W_{cyc} は、過程 $A \rightarrow B$ と過程 $C \rightarrow D$ で外部にする仕事をそれぞれ $W_{A \rightarrow B}$ および $W_{C \rightarrow D}$ とするとき、

$$W_{\text{cyc}} = W_{A \rightarrow B} + W_{C \rightarrow D}$$

と表せる。この W_{cyc} を求めよ。

- 2-4. $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ のとき、この熱機関の効率は、カルノー機関の効率に等しいことを示せ。

問題 V

以下の設問に解答せよ。解答にあたっては結果だけでなく導出過程も記すこと。

問 1 以下の常微分方程式の一般解 $y(x)$ を求めよ。1-3. では変数 $z = 1/y$ を用いて解いてもよい。

1-1.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{x} = 0$$

1-2.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$$

1-3.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2$$

問 2 次の行列 A に対して以下の問に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2-1. 行列 A が正則であれば逆行列を求めよ。正則でなければ階数を求めよ。

2-2. 行列 A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ。固有ベクトルは互いに直交するようにすること。

問 3 以下の問に答えよ。

3-1. 一般のスカラー場 Φ とベクトル場 \mathbf{A} に対する次の公式を導出せよ。

$$\nabla \times (\Phi \mathbf{A}) = \nabla \Phi \times \mathbf{A} + \Phi (\nabla \times \mathbf{A})$$

3-2. 位置ベクトル $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ に対して、 $\nabla \times \mathbf{r}$ を計算し求めよ。また、 $\nabla \times (\mathbf{r}/r^n)$ を原点 $r = 0$ 以外に対し求めよ。但し、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトル、 $r = |\mathbf{r}|$ 、 n は任意の自然数である。

問 4 以下の問に答えよ。

4-1. 複素関数 $f(z) = \frac{1}{z^6 + 1}$ の複素平面 $z = x + iy$ におけるすべての極の位置と位数を求めよ。

4-2. 4-1. の $f(z)$ の複素平面上半面 ($y > 0$) にある極に対し、留数をそれぞれ求めよ。

4-3. 上の結果を用いて、実数の定積分 $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$ の値を求めよ。

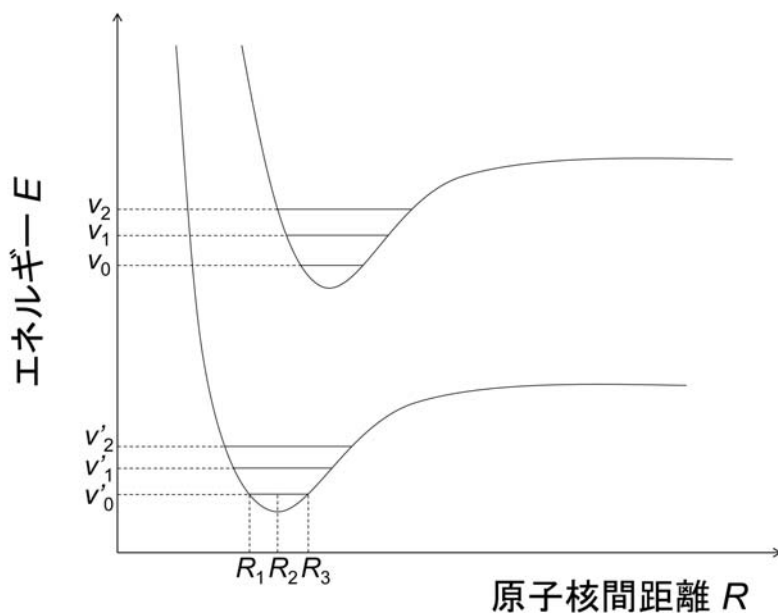
問題 VI

1 北極星からの可視光が人間の目の網膜上に結像するときの、その光子数を求める。北極星から地球に到達する可視光の光子束 I は $I = 4 \times 10^3 \text{ mm}^{-2}\text{s}^{-1}$ であるとする。これらの可視光のうち 30 % は大気によって吸収、または散乱されるため、人間の目に届く可視光の光子束 I' は I よりも小さくなる。光子束 I' の可視光のうち、25 % は目の最表面にある角膜で散乱され、さらに 9 % は角膜の内部で吸収される。角膜で吸収、散乱されなかった可視光が瞳孔を通過する。この光子束を I'' とする。光子束 I'' の可視光のうち、43 % は網膜にたどり着く前に、眼球によって吸収されてしまう。眼球による吸収を逃れた可視光が、最終的に網膜上に結像する。この光子束を I''' とする。

1-1. I' 、 I'' 、 I''' を計算せよ。

1-2. 人間の目の応答時間を 0.1 s、夜間における人間の瞳孔の面積をおよそ 40 mm^2 としたときの、0.1 s のあいだにおける網膜上に結像する北極星からの光子数を求めよ。

分子は光子を吸収、または放射することにより、異なる二つの電子状態間を遷移する。分子の基底状態からある励起状態への電子遷移は、およそ 10^{-16}s という短い時間でおこる。一方で、原子核は電子よりはるかに重く動きにくい（原子核の振動の周期はおよそ 10^{-13}s ）、電子遷移のあいだは原子核の位置はほとんど変わらないと考えることができる。これを「フランク＝コンドンの原理」という。図は、ある分子についての電子基底状態（下側）と電子励起状態（上側）についてのポテンシャルエネルギー曲線の略図である。この略図を用いて以下の問いに答えよ。



- 1-3. 分子は基底状態の最低振動状態にあるとする。電子遷移が一番おこりやすい原子核間距離は、原子核の存在確率がもっとも高い位置である。略図において、基底状態で原子核の存在確率のもっとも高い位置は R_1 、 R_2 、 R_3 のうちどれか答えよ。
- 1-4. 分子が光子を吸収し、励起状態へと電子遷移したとする。フランク=コンドンの原理に基づき、最も遷移確率が高いと考えられる励起状態の振動準位は v_0 、 v_1 、 v_2 のうちどれか答えよ。
- 1-5. 電子振動励起状態にある分子はまわりの分子と衝突し、励起状態の最低振動状態 (v_0) へと放射を伴わずにエネルギーを失ったとする。 v_0 から光子を放射することにより、基底状態へと電子遷移したとき、フランク=コンドンの原理に基づき、最も遷移確率が高いと考えられる基底状態の振動準位は v'_0 、 v'_1 、 v'_2 のうちどれか答えよ。
- 1-6. 気体、液体、固体の吸収および発光スペクトルで観測される線幅の物理的な起源について、分子の速度、数密度、量子力学的な観点などから考えられることを述べよ。
- 2 平衡反応 $A \rightleftharpoons B$ は双方向に一次の反応であり、右向き (A から B)、左向き (B から A) の反応の速度定数を、それぞれ k 、 k' 、A と B の初濃度がそれぞれ $[A]_0$ 、 $[B]_0$ であるとする。
- 2-1. A と B の濃度をそれぞれ $[A]$ と $[B]$ とすると、A の濃度の時間変化 $\frac{d[A]}{dt}$ と、B の濃度の時間変化 $\frac{d[B]}{dt}$ を、 k 、 k' 、 $[A]$ 、 $[B]$ を用いて表せ。
- 2-2. 平衡反応であるため、 $[A]$ と $[B]$ との和と初濃度 $[A]_0$ と $[B]_0$ との和は常に等しい。このとき $[A]$ を時間 t の関数として表せ。
- 2-3. この反応系の最終組成 $[A]_\infty$ 、 $[B]_\infty$ を求めよ。また、 $[B]_\infty/[A]_\infty$ はどのように表されるか。
- 2-4. ある反応 $2A + B \rightarrow C$ は、A、B、C の濃度をそれぞれ $[A]$ 、 $[B]$ 、 $[C]$ とすると、三次の速度式 $\frac{d[C]}{dt} = k[A]^2[B]$ に従うとする。この速度式の積分形の式を求め、 kt について解け。ただし、A の初濃度を $[A]_0$ とし、反応初期に A と B は量論比で存在していたとする。

問題 VII

1 時間変化するある物理量 $x(t)$ を、サンプリング周波数 f_s で N 点のデータをサンプリングした。この波形データをプロットすると図 1(a) のようになったが、 N が十分大きいいため連続的に繋がっているようにみえている。この波形プロットから、比較的長周期かつ大振幅の変動に加え、それよりも短周期でかつ振幅が小さいノイズが混入していることが判った。周波数を f 、波形データの k 番目のデータを x_k として、以下の問に答えよ。

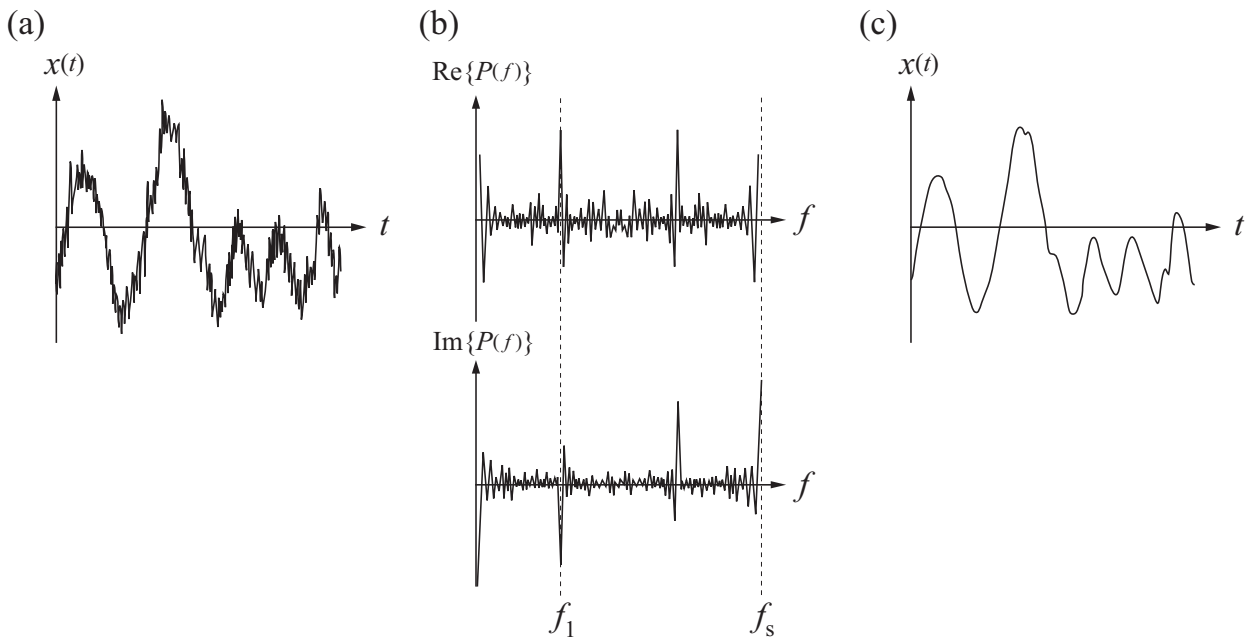


図 1

- 1-1. 図 1(a) の波形データ x_1, x_2, \dots, x_N の平均値 \bar{X} を式で示せ。
- 1-2. 周波数が $f_s/2$ を越える成分の信号強度が十分大きい場合を考える。離散的なデータサンプリングであるがゆえに、それらの成分が引き起こす事象を説明せよ。
- 1-3. 図 1(a) の波形データの分散 σ^2 と標準偏差 s をそれぞれ式で示せ。

図 1(a) の波形データを下式に従い離散フーリエ変換したら、図 1(b) に示すスペクトル $P(f)$ を得た。さらにある処理を施すと、図 1(c) のようにノイズが除去された波形データを得た。以下の問に答えよ。

$$P(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-i \frac{2\pi f}{N} k}$$

- 1-4. 図 1(b) における周波数 f_1 のピークは、ほぼ単一周波数をもつノイズであることが分かった。これをデジタル波形処理によって取り除き図 1(c) の波形を得ようとする場合、どのようなフィルタ関数 $M(f)$ を用いるのが適切か、例を図示し説明せよ。
- 1-5. スペクトル $P(f)$ とフィルタ関数 $M(f)$ を用いてどのような処理を行えば図 1(c) の波形を得るか、式を用いて説明せよ。

- 2 時間変化しない一様な磁束密度 B の中を、電荷 q をもつ荷電粒子が速度 v で運動している。一般的に、荷電粒子はローレンツ力を受けて旋回運動を行うが、荷電粒子が外力 F を受けて運動する場合、旋回運動の中心は下式に従う速度 v_d で移動していく (ドリフト運動)。

$$v_d = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{qB^2}$$

他の粒子との相互作用は無視できるほど小さいと仮定して、以下の問に答えよ。

- 2-1. 時間変化しない一様な電場 E が存在する場合のドリフト運動の速度 v_d を求めよ。
- 2-2. 前問 2-1. において、 $q > 0$, $q < 0$ のそれぞれの粒子の運動と軌跡を模式的に図示せよ。

図 2 に示すように、外部電場は存在しないが磁場の勾配が存在する空間を考える。この空間を荷電粒子が運動するとき、粒子は $\mathbf{F} = -\mu_m \nabla B$ に従う力を受ける。ただし μ_m と B はそれぞれ磁気モーメントと磁束密度 B の大きさであり、荷電粒子の質量を m 、磁力線に垂直な速度成分を v_{\perp} とすると、 $\mu_m = mv_{\perp}^2/2B$ であらわされる。

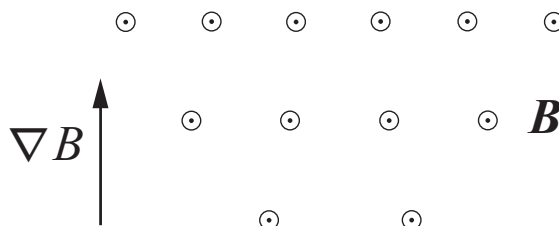


図 2

- 2-3. このときのドリフト運動の速度 v_d を求めよ。
- 2-4. 前問 2-3. において $q > 0$, $q < 0$ のそれぞれの粒子の運動と軌跡を模式的に図示せよ。
- 2-5. 図 3 のように、地球磁気圏尾部からは荷電粒子が常に地球方向に流入している。このときの荷電粒子のドリフト運動を考え、磁気赤道面に生じうる現象を説明せよ。
- 2-6. 地球表面の磁気赤道付近にて地球磁場の南北成分強度を磁力計によって測定 (北向きが正符号) するとき、図 3 の矢印で示された荷電粒子の流入量が大きくなるにつれてどのような信号が観測されると考えられるか。例を図示して論ぜよ。

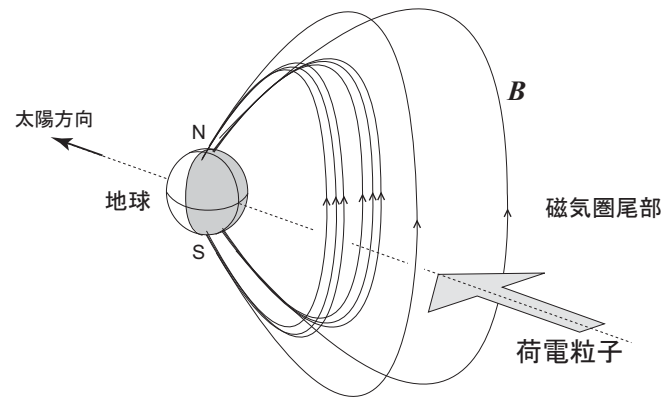


図 3

3 以下の間に答えよ。

3-1. 地球の極域では、爆発的にオーロラが増光する現象 (サブストーム) がたびたび起こる。このサブストームの発生メカニズムを説明せよ。ただし以下のキーワードを全て用いること。

(キーワード)

電子、磁気リコネクション、磁気圏尾部、加速領域、磁気圧、沿磁力線電流、太陽風、プラズマシート、磁力線の張力、励起・脱励起

3-2. 高度によってオーロラの発光色が異なる理由を説明せよ。

3-3. 地球以外でオーロラが発生している太陽系内惑星の代表例として木星が挙げられる。木星で発生するオーロラと地球で発生するオーロラとの類似点と相違点を挙げよ。