（平成 25 年 8 月 19 日実施）

平成 **26** 年度

北海道大学大学院理学院　物性物理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午後）

受験に関する注意

- 試験時間：　13:00〜15:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者（宇宙理学専攻を併願する者を含む）：問題 **III, IV** を解答すること。
- 宇宙理学専攻志望者：
  - 宇宙物理学・素粒子論・原子核理論・情報メディア科学・原子核反応データ科学を志望するものは問題 **III, IV** を解答すること。
  - 理論惑星科学・惑星宇宙グループ・宇宙物質科学・相転移ダイナミクス・飛翔体観測を志望するものは問題 **III, IV, V, VI,VII** の中から 2 つの問題を選択して解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 III	2 枚
	問題 IV	2 枚
	問題 V	2 枚
	問題 VI	1 枚
	問題 VII	2 枚
解答紙	2 問題分	4 枚（各問題 2 枚）
草案紙	2 問題分	2 枚（各問題 1 枚）

問題 III

問 1 $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ で与えられる軌道角運動量について考える。

1-1. 運動量 $\boldsymbol{p}$ を微分演算子で表し、交換関係 $[r_j, p_k] = i\hbar\delta_{j,k},\ (j, k = x, y, z)$ が成立することを示せ。

1-2. $\boldsymbol{l}^2$、l_z が可換であることを示せ。

$\boldsymbol{l}^2$、l_z が可換であることより、これらの演算子は同時固有関数を持つ。$\boldsymbol{l}^2$ の固有値 $\hbar^2\lambda_l$ 、l_z の固有値 $\hbar m$ をもつ固有関数を $Y_{l,m}$ とする。また、演算子 $l_\pm = l_x \pm il_y$ を定義する。

1-3. 以下の関係のうち 1 つを選んで導け。選択しなかったものは、前提条件として用いてよい。

- $\lambda_l - m^2 \geq 0$
- $l_\pm Y_{l,m} \propto Y_{l,m\pm1}$
- m の上限と下限の差を $2l$ としたとき $2l$ は 0 か正の整数であり $\lambda_l = l(l+1)$

以下、中心対称性のある系を考えるために、次のような極座標を考える。

$$x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\theta$$

1-4. l_z を極座標を用いて表せ。

同様に

$$l_x = -i\hbar\left(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right),\ l_y = -i\hbar\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

となる。

1-5. $\lambda_l = l(l+1)$(l は正の整数) である固有関数 $\sin^l\theta e^{il\phi}$ が与えられた時、この関数が l_z に対する上限値の固有値を持つ固有関数で、$m = l$ であることを確認せよ。

1-6. $l = 1$ に関して $Y_{l,l}(\theta,\phi)$ の具体的な形から全ての可能な m に対する $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ を導け。(関数は規格化されている必要はない。)

問 2 中心に位置する正電荷と電子の間にクーロンポテンシャルが作用する水素様原子（電子を 1 つもつ原子) 上の電子のハミルトニアン $H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m_e} + V(r)$ について考える。ここで、m_e は電子の質量、r は中心からの距離である。
このハミルトニアンの固有関数 $\chi(r,\theta,\phi)$ は、r に依存する関数と問 1 の θ, ϕ に依存する関数の積を用いて $\chi_{n,l,m}(r,\theta,\phi) = R_{n,l}(r)Y_{l,m}(\theta,\phi)$ と書ける。ここで $n \geq l$ の整数である。

$Y_{2,m}(\theta,\phi)$ の具体的な形は、問１と同様の方法で以下の様に求めることができる。

$$
\begin{aligned}
Y_{2,2}\,(\theta,\phi) &= \sqrt{\tfrac{15}{8\pi}} \times \tfrac{1}{2}\sin^2\theta\, e^{2i\phi} \\
Y_{2,1}\,(\theta,\phi) &= -\sqrt{\tfrac{15}{8\pi}} \times \sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi} \\
Y_{2,0}\,(\theta,\phi) &= \sqrt{\tfrac{15}{8\pi}} \times \tfrac{1}{\sqrt{6}}\left(3\cos^2\theta - 1\right) \\
Y_{2,-1}\,(\theta,\phi) &= \sqrt{\tfrac{15}{8\pi}} \times \sin\theta\cos\theta\, e^{-i\phi} \\
Y_{2,-2}\,(\theta,\phi) &= \sqrt{\tfrac{15}{8\pi}} \times \tfrac{1}{2}\sin^2\theta\, e^{-2i\phi}
\end{aligned}
$$

図１ (a) に示すような、座標の原点に水素様原子があり、その周りの軸上、立方対称の位置に６個の電荷 $-q(q>0)$ が配置された場合の電子の波動関数を考えると $n=3, l=2$ で与えられる状態は、対称性により図２のような符号をもつ実関数になる。

2-1. 図２のそれぞれの状態を上記の $Y_{2,m}(\theta,\phi)$ をつかって書き下せ。そして、それぞれの状態の l_z の期待値を求めよ。

2-2. 図２の状態のエネルギー準位の大小関係を定性的に説明せよ。

2-3. 図１ (b) のように z 軸上の電荷が、原点からの距離が長くなる方向に微小に変位したとき **2-2.** のエネルギー準位はどのように変化するか議論せよ。

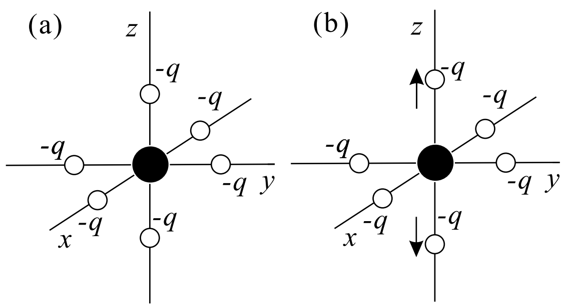


図１

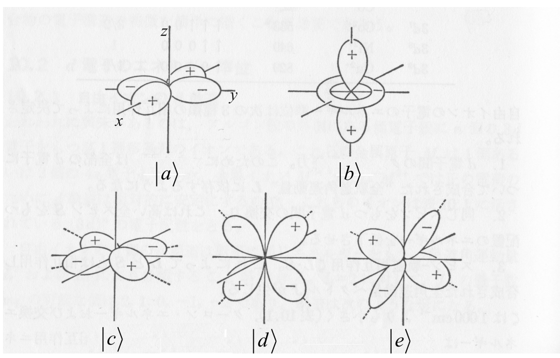


図２

問題 IV

問 1 次の問いに答えよ。ただし，問題中の定積熱容量はすべて温度によらない定数とする。

1-1. 最初、絶対温度 T_0 であった物体の温度が、外部との熱接触により T に変化したとき、エントロピーの増加量を求めよ。ただし、物体の定積熱容量を C とし、熱接触をしている間、仕事の出入りはないものとする。

1-2. 最初、絶対温度 T_0 であった物体が、絶対温度 T_1 の熱浴との熱接触により Q の熱を受けた。このとき、物体と熱浴のそれぞれのエントロピー増加量の合計を求めよ。また、その増加量を最大にする Q の値を求め、そのときの物体の温度を求めよ。ただし、物体の定積熱容量を C とし、熱接触をしている間、仕事の出入りはないものとする。

1-3. 最初、それぞれ絶対温度 T_{0k} であった N 個の物体の温度が、互いにほかのすべてと熱接触し続けることにより、それぞれ T_k に変化した $(k = 1, \cdots, N)$。この熱接触で実現する熱平衡におけるそれぞれの T_k を求めよ。ただし、それぞれの物体の定積熱容量を C_k とし $(k = 1, \cdots, N)$、熱接触している間、互いに仕事のやり取りはなく、外部からの熱や仕事の出入りもないものとする。（ヒント：全体のエントロピーの増加量を最大化するようなそれぞれの温度を求めよ。）

問 2 気体の内部エネルギー E をエントロピー S と体積 V の関数として表すとき、その微分は $\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V$ と表される。ここで T, p は気体の絶対温度と内部圧力である。次の問いに答えよ。

2-1. Helmholtz の自由エネルギー $F = E - TS$ を T, V の関数として表すとき、その微分が

$$\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V$$

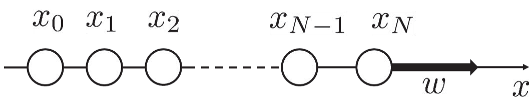
と表されることを示せ。

2-2. 等式

$$p = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

が成立することを示せ。

問 3 高分子鎖の単純な模型として、下図のように直線上に束縛された $N+1$ 個の要素からなる 1 次元鎖を考える。各要素の質量は m であり、それらの運動量と位置を $p_i, x_i \quad (i = 0, 1, \cdots, N)$ とする。また、$i-1$ 番目と i 番目の隣接要素間には相互作用ポテンシャル $U(x_i - x_{i-1})$ で表される力が働いている。鎖の一端である 0 番目の要素は位置を固定されており ($x_0 = 0$ とする)、他端である N 番目の要素は張力 w で x 正方向に引っ張られているとする。



3-1. 系の Hamiltonian は

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^{N} U(x_i - x_{i-1}) - w x_N$$

で与えられる。この系が温度 T に保たれているとしたとき、古典統計力学的分配関数が

$$Z(\beta, w) = \left(\sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}} \frac{\varphi(\beta, \beta w)}{h} \right)^N, \quad \varphi(y, z) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-yU(\xi) + z\xi} \mathrm{d}\xi$$

と表されることを示せ。ここで $\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$, h は Planck 定数，k_{B} は Boltzmann 定数である。（必要ならば公式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ を用いてよい。）

3-2. 相互作用ポテンシャル $U(x)$ が

$$U(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq a, \\ \infty, & |x| > a \end{cases}$$

で表されるとき、鎖の平均の長さ $L = \langle x_N \rangle$ を求め、その w 依存性の概略を図示せよ。また、$\beta w a \ll 1$ における鎖のばね定数を求めよ。

問題 V

以下の 問 **1** から 問 **4** の設問に解答せよ。解答にあたっては結果だけでなく導出過程も記すこと。

1 行列に関する以下の設問に答えよ。

1-1. 以下で定義される行列 A の逆行列を求めよ。ただし、θ は実定数である。

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1-2. 次の行列 B の複素固有値の主値を全て求めよ。

$$B = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2 以下の設問に答えよ。

2-1. $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6$ を求めよ。

2-2. 次の実積分を計算せよ。 ただし、a は正の実定数である。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + a^4}$$

3 3 次元直交座標系で定義されたベクトル場

$$\boldsymbol{v} = (ax - by, ay + bx, az)$$

を考える。 ただし、a, b ともに実定数であるとする。このとき、以下を求めよ。

3-1. $\mathrm{div}\boldsymbol{v}$

3-2. $\displaystyle\int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS$. ただし、$S$ は原点を中心とする半径 r の球面、$\boldsymbol{n}$ は S 上における外向きの単位法線ベクトルである。

4 1 次元の有限領域 $-\pi < x < \pi$ において以下の微分方程式を考える。

$$\frac{d}{dx}f(x) = x, \tag{1}$$

$$f(0) = 0 \tag{2}$$

この微分方程式の解をフーリエ級数展開によって求める。$f(x)$ のフーリエ級数展開は

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \cos mx + b_m \sin mx) \tag{3}$$

である。式 (3) 中の係数は

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx, \quad (m = 0, 1, 2, \cdots), \tag{4}$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx, \quad (m = 1, 2, \cdots) \tag{5}$$

によって得られる。以下の設問に従って、式 (1) および 式 (2) を満たす $f(x)$ の係数 a_m, b_m を決定し、解を求めよ。

4-1. 式 (3) から、式 (4) と 式 (5) を導け。

4-2. 式 (4) と 式 (5) を用いて、x のフーリエ級数展開が

$$x = 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\sin mx}{m} \tag{6}$$

となることを示せ。

4-3. 式 (3) から $\dfrac{df}{dx}$ のフーリエ級数展開を求めよ。

4-4. 前問 **4-2** と **4-3** の結果を用いて、式 (1) を満たす $f(x)$ のフーリエ級数展開の係数 a_m, b_m は、$m \geq 1$ について以下になることを示せ。

$$a_m = (-1)^m \frac{2}{m^2}, \quad (m = 1, 2, \cdots), \tag{7}$$

$$b_m = 0, \qquad\qquad (m = 1, 2, \cdots) \tag{8}$$

4-5. 前問 **4-4** の結果および

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\cos mx}{m^2} \tag{9}$$

を用いて、式 (1) および 式 (2) の解は $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ となることを示せ。

問題 VI

太陽からの極紫外線やX線により惑星大気の一部が電離した惑星電離圏が惑星の超高層大気に形成される。地球電離圏では、高度 200km 付近で生成された酸素原子イオンと電子は約 0.1eV のエネルギーを持ち地球磁場の中でサイクロトロン運動をする。必要に応じて定数と変数を定義して以下の問 **1** から問 **4** の設問に解答せよ。

1 時間変化しない一様な磁場の中で、他の粒子と相互作用していない荷電粒子が運動している。ただし電場は存在していないとする。

1-1. 質量 m, 電荷 q の荷電粒子に対する運動方程式を示せ。

1-2. 荷電粒子のサイクロトロン周波数およびラーマー半径を示せ。

2 地球電離圏では、日中の磁気赤道付近で磁力線に垂直な東向きのダイナモ電場が存在する。

2-1. 時間変化しない一様な地球磁場 $\boldsymbol{B}$ とダイナモ電場 $\boldsymbol{E}$ の中で運動しているイオンと電子のドリフト速度を示せ。また、磁気赤道上でのイオンと電子のドリフト方向についても述べよ。

2-2. 磁気赤道上で地球磁力線に垂直な重力が存在するときのイオンと電子のドリフト運動について考察せよ。重力加速度 $\boldsymbol{g}$ は一定とする。

3 大気との衝突の効果を含めた流体としての地球電離圏のイオンと電子を考える。磁場と電場は一様であり時間変化しないとする。

3-1. イオンと電子の運動方程式を示せ。イオンと電子が単位時間に大気と衝突する回数の平均値 (衝突周波数) を $\nu_{\mathrm{in}}, \nu_{\mathrm{en}}$ とする。大気は静止しているとする。

3-2. 定常状態でのイオンと電子の速度 ($\boldsymbol{v}_i$ と $\boldsymbol{v}_e$) は

$$\boldsymbol{v}_i = a_i \frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{B}|} + b_i \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|^2},$$
$$\boldsymbol{v}_e = a_e \frac{\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{B}|} + b_e \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|^2}$$

と書き表せる。a_i, b_i, a_e, a_e の表式を示せ。ただし、イオン、電子、大気の密度は一様であり、イオンと電子の運動速度は熱速度より十分小さく移流項を無視できるとする。磁力線方向の電場の大きさも無視できるほど小さいとする。

3-3. 前問 **3-2** の結果を用いて、ペダーソン電気伝導度およびホール電気伝導度の表式を導出せよ。

3-4. 地球電離圏に流れる電流を地上で測定する方法について簡潔に述べよ。また、電流の日変化についても簡潔に考察せよ。

4 二酸化炭素からなる金星大気にも地球と同様に金星電離圏が形成される。地球電離圏との相違に着目して、金星電離圏に流れる電流について考察せよ。

問題 VII

以下の 問 **1** および 問 **2** の設問に解答せよ。

1 溶液中で進行する触媒反応について考える。式 (1) に示したように、反応物 A と触媒 X が複合体 AX を作った後、主生成物 P と副生成物 B が生まれ、触媒 X が再生された。

$$\mathrm{A} + \mathrm{X} \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} \mathrm{AX} \xrightarrow{k_3} P + B + X \tag{1}$$

時刻 t における、A, X, AX, P, B の濃度をそれぞれ [A],[X],[AX],[P],[B] とする。また、それぞれの反応の速度定数を k_1, k_2, k_3 とする。

1-1. 化学反応速度 $r = d[\mathrm{P}]/dt$ を [AX] を用いて表せ。

1-2. 複合体濃度の時間変化 $d[\mathrm{AX}]/dt$ を、化学種の濃度と反応速度定数を用いて表せ。

1-3. 複合体の濃度 [AX] が一定に達した状態における [AX] を求めよ。

1-4. 式 (1) の化学反応が開始した時刻 $t = 0$ での触媒 X の濃度を $[\mathrm{X}]_0$ とすると、$[\mathrm{X}]_0 = [\mathrm{X}] + [\mathrm{AX}]$ と表せる。この関係と前問 **1-3** の結果を用いて、時刻 t における触媒 X の濃度 [X] を表せ。

1-5. 前問 **1-1** の結果に **1-3** と **1-4** の結果を代入し、反応速度 r を求めよ。

1-6. 反応物の濃度 [A] が十分に薄く、k_1 が十分に小さい場合には、反応速度は [A] にどのように依存するか、説明せよ。

1-7. 反応物の濃度 [A] が十分に濃く、k_1 が十分に大きい場合には、反応速度は [A] にどのように依存するか、説明せよ。

2 固相の大きさと安定性について考える。簡単のため、固相は球形とし、多数の分子から成るものとする。固相の内部では、多数の分子が互いに強固に結合しあっている。それに対し、固相の表面には、結合していない未反応な結合手が多数露出しているため、表面は内部に比べて不安定である。そのため、有限の半径 r を有する固相は、半径が無限大で表面を持たないバルクな固相よりも自由エネルギーが高い。温度 T と圧力 P が与えられた系においては、半径が r の固相のギブス自由エネルギーは，次式で表される.

$$G_{\mathrm{solid}}(r) = G_{\mathrm{solid}}(\infty) + E \tag{1}$$

ここで、E は表面が存在するために余剰に高くなる自由エネルギー（表面自由エネルギー）を、そして $G_{\mathrm{solid}}(\infty)$ は半径が無限大で表面を持たないバルクな固相の自由エネルギーを示す。

2-1. 半径 r の固相中に含まれる分子 1 つあたりの自由エネルギー（化学ポテンシャル）$\mu_{\mathrm{solid}}(r)$ を、固相中に含まれる分子の個数 N と、半径が無限大の固相の化学ポテンシャル $\mu_{\mathrm{solid}}(\infty)$ を用いて表せ。ただし、$\mu_{\mathrm{solid}}(r) = \partial G_{\mathrm{solid}}(r)/\partial N$ と表される。

2-2. 固相を構成する分子 1 つの体積を v とする。固相中の分子の個数 N と固相の表面積 S の半径 r に対する依存性、$\partial N/\partial r$ および $\partial S/\partial r$ を示せ。ただし、v は定数とする。

2-3. 固相の単位面積あたりの表面自由エネルギー γ を半径 r によらない定数とし、式 (1) 中の固相の表面自由エネルギーは $E = S \cdot \gamma$ と表せるとする。$\mu_{\mathrm{solid}}(r)$ と $\mu_{\mathrm{solid}}(\infty)$ の関係を v, γ, r を用いて表せ。この関係は、Gibbs-Thomson の式と呼ばれる。

2-4. 次に、半径が無限大で表面を持たないバルクな固相が融液から生成する際の、固相と融液との化学ポテンシャル差 $\Delta\mu(\infty) = \mu_{\mathrm{solid}}(\infty) - \mu_{\mathrm{liquid}} = \Delta H_m - T\Delta S_m$ について考える。ここで、ΔH_m と ΔS_m はそれぞれ分子 1 個あたりのエンタルピー変化およびエントロピー変化を示す（ただし、ΔH_m は負である）。系の温度 T が半径無限大の固相の融点 $T_{\mathrm{melt}}(\infty)$ と等しい時、固相と融液は互いに平衡であるので、$\Delta S_m = \Delta H_m/T_{\mathrm{melt}}(\infty)$ と表される。系の温度が $T_{\mathrm{melt}}(\infty)$ よりも低い時の $\Delta\mu(\infty)$ を、温度差 $\Delta T = T_{\mathrm{melt}}(\infty) - T$，$T_{\mathrm{melt}}(\infty)$ および ΔH_m を用いて表せ。ただし、ΔH_m と ΔS_m は温度によらない定数と考える。

2-5. 半径が r の固相が融液から生成する際の、固相と融液との化学ポテンシャル差 $\Delta\mu(r) = \mu_{\mathrm{solid}}(r) - \mu_{\mathrm{liquid}}$ を、**2-4** の結果および v, γ, r を用いて表せ。ただし、簡単のため、ここでは固相と融液の界面についてのみ考え、固相と融液の界面において、前問 **2-3** の関係が成り立つものとする.

2-6. 半径 r の固相が融液と平衡である時、$\Delta\mu(r) = 0$ となる。その時の温度 $T_{\mathrm{melt}}(r)$ を半径 r の関数として表せ。また、ΔH_m が負であることに留意して、$T_{\mathrm{melt}}(r)$ と r の関係を図示せよ。