

(平成 24 年 8 月 9 日実施)

## 平成 25 年度

### 北海道大学大学院理学院 物性物理学専攻・宇宙理学専攻 修士（博士前期）課程入学試験 専門科目問題（午後）

#### 受験に関する注意

- 試験時間： 13:00～15:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者（宇宙理学専攻を併願する者を含む）：問題 III, IV を解答すること。
- 宇宙理学専攻志望者：
  - － 宇宙物理学・素粒子論・原子核理論・情報メディア科学・原子核反応データ科学を志望するものは問題 III, IV を解答すること。
  - － 理論惑星科学・宇宙物質科学グループ・惑星宇宙グループ・相転移ダイナミクス・飛翔体観測を志望するものは問題 III, IV, V, VI, VII の中から 2 つの問題を選択して解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 III	3 枚
	問題 IV	2 枚
	問題 V	1 枚
	問題 VI	3 枚
	問題 VII	2 枚
解答紙	2 問題分	4 枚（各問題 2 枚）
草案紙	2 問題分	2 枚（各問題 1 枚）

### 問題 III

問 1 質量  $m$  をもつ粒子が  $x$  軸上を運動し、ポテンシャル  $V(x)$  によって散乱される問題を考えよう。

1-1. 粒子の波動関数を  $\psi(x, t)$  と書く。存在確率密度  $\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2$  に対し、

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} j(x, t) = 0 \quad (1)$$

を満たす関数  $j(x, t)$  をシュレーディンガー方程式に基づいて、 $\psi$  を使って表しなさい。ここで  $t$  は時間であり、ポテンシャルは実関数とする。

1-2. 式 (1) と、定常状態では波動関数が  $\psi(x, t) = \varphi(x) e^{-iEt/\hbar}$  という形をもつことを使って、定常状態の  $j$  が  $x$  にも  $t$  にもよらない定数であることを示しなさい。

1-3.  $V(x)$  は  $|x| \geq L$  で 0 となる、図 1 のように局在化されたポテンシャルとする。エネルギー  $E$  の定常状態  $\varphi(x)$  に対するシュレーディンガー方程式の一般解を次のように表そう。

$$\varphi(x) = \begin{cases} A e^{ikx} + B e^{-ikx}, & (x < -L), \\ C e^{ikx} + D e^{-ikx}, & (x > L) \end{cases} \quad (2)$$

ここで  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$  であり、 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  は定数である。このとき、 $j(x, t)$  を  $x < -L$  と  $x > L$  でそれぞれ求め、その結果と問 1-2 の内容を使って  $|A|$ 、 $|B|$ 、 $|C|$ 、 $|D|$  の間の関係式を求めなさい。粒子が入射する方向は決めていないことに注意すること。

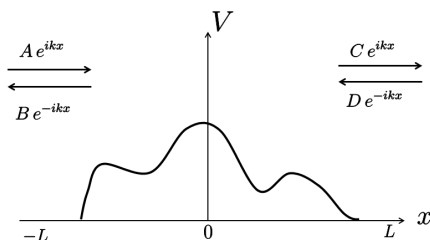


図 1

次に、ポテンシャル  $V(x)$  に対し、シュレーディンガー方程式の一般解を求めて前問の (2) の係数  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  の間の関係式を決定し、それを

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \quad (3)$$

のように行列を使って表すことにする。

1-4. 図 2 のように、ポテンシャルがデルタ関数  $V(x) = Q \delta(x)$  で与えられるとき、(3) 式の行列成分  $M_{ij}$  をすべて求めなさい。 $(Q$  は定数である。)

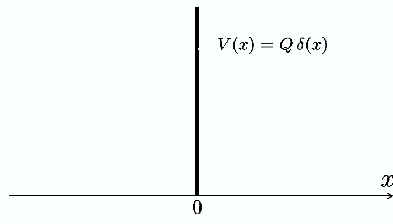


図2

- 1-5. ポテンシャル  $V(x)$  による散乱の問題が解け、このポテンシャルに対する (3) 式の行列成分  $M_{ij}$  が完全に求まったとしよう。次に図3の様な新しいポテンシャル  $\tilde{V}(x) = V(x) + V(x - 2L)$  のもとでの同様の粒子散乱を考える。 $L$  は問1-3で説明した長さである。粒子を定常的に  $x = -\infty$  から入射させるとき、新しいポテンシャルによる粒子の反射率 (係数)  $R$  を  $M_{ij}$  を使って表しなさい。ただし、ポテンシャル第2項  $V(x - 2L)$  による散乱では、式 (2) の  $e^{\pm ikx}$  の  $x$  が  $x - 2L$  とずれることに注意しなさい。

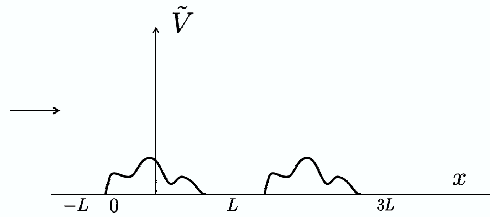


図3

問 2 水素原子を重心系において考えよう。原子核は電子と比べて重いので、換算質量  $\mu$  は電子の質量と同じと考えてよく、電子の電荷は  $-e (< 0)$  である。相対座標を  $\mathbf{r}$  とするとクーロンポテンシャルは  $V(r) = -e^2/r = -e^2/|\mathbf{r}|$  である。極座標を用いると、定常状態の波動関数の動径部分  $R_{n,\ell}(r)$  の満たす方程式は次式で与えられる。ただし、 $n = 1, 2, \dots$  は主量子数、 $\ell$  は方位量子数である。

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) R_{n,\ell}(r) + V(r) R_{n,\ell}(r) = E R_{n,\ell}(r) \quad (4)$$

水素原子についての以下の問いに答えなさい。ただし、次の積分公式を使ってよい。

$$\int_0^\infty dx x^m e^{-x} = m! \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

- 2-1.  $\ell = n - 1$  の動径波動関数は  $R_{n,n-1}(r) = N_n r^k e^{-r/na}$  で与えられる。ここで  $N_n$  は規格化定数、 $k$  はある定数、 $a = \hbar^2/\mu e^2$  はボーア半径である。 $k$  と  $N_n$  を決定し、各  $n = 1, 2, \dots$  に対しエネルギー固有値  $E = E_n$  を求めなさい。
- 2-2.  $n \geq 2$  のとき、状態  $R_{n,n-1}(r)$  に対し、 $\langle 1/r^3 \rangle$  を計算しなさい。
- 2-3. 電子のスピン  $\hat{\mathbf{S}}$  と軌道角運動量  $\hat{\mathbf{L}}$  の相互作用 (LS 結合) のハミルトニアンは  $\hat{H}_{LS} = (e^2/2\mu^2 c^2 r^3) \hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{L}}$  で与えられる。水素原子が  $R_{n,n-1}(r)$  の状態にあるとき、全角運動量  $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$  の大きさ  $J$  が取りうる全ての値をもとめ、各  $J$  の値に対し、 $\hat{H}_{LS}$  について 1 次の摂動論を用いて LS 結合のエネルギーを求めなさい。ただし、 $n \geq 2$  とする。
- 2-4. 前問と同様、軌道角運動量  $\hat{\mathbf{L}}$  とスピン角運動量  $\hat{\mathbf{S}}$  を合成した全角運動量  $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$  を考えよう。 $\hat{\mathbf{J}}^2$  の固有値が  $J(J+1)\hbar^2$ 、 $\hat{J}_z$  の固有値が  $M\hbar$  の固有状態を  $|J, M\rangle$  で表す。この状態を軌道角運動量  $\ell (\geq 1)$  の状態と、スピン角運動量  $S = 1/2$  の状態の合成で作る。 $\hat{\mathbf{L}}^2$  の固有値が  $\ell(\ell+1)\hbar^2$ 、 $\hat{L}_z$  の固有値が  $m_\ell \hbar$  の固有状態を  $|m_\ell\rangle$ 、また、 $\hat{\mathbf{S}}^2$  の固有値が  $(3/4)\hbar^2$  で、 $\hat{S}_z$  の固有値が  $m_s \hbar$  の固有状態を  $|m_s\rangle$  で表し、2 つの角運動量の合成系の状態を  $|m_\ell\rangle |m_s\rangle$  と書く。このとき、 $\hat{\mathbf{J}}^2$  と  $\hat{J}_z$  の固有状態  $|\ell - \frac{1}{2}, \ell - \frac{1}{2}\rangle$  を  $|m_\ell\rangle |m_s\rangle$  の線形結合  $\sum_{m_\ell, m_s} C_{m_\ell, m_s} |m_\ell\rangle |m_s\rangle$  の形で表しなさい。状態はすべて規格化されているものとする。
- ただし、 $\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$  の 0 でない行列要素に対しては次式が成り立つことを使ってよい。

$$\langle J, M \pm 1 | \hat{J}_\pm | J, M \rangle = \hbar \sqrt{(J \mp M)(J \pm M + 1)}$$

## 問題 IV

問 1 有効数字を二桁として、以下の問いに答えよ。ただし、 $1\text{cal} = 4.2\text{J}$ である。

- 1-1. ある成人が、ある 1 日に採った食物は、熱量にして  $2000\text{kcal}$  であった。この熱が体脂肪にならず、すべて消費されたとすると、この人の毎秒当りの平均エネルギー消費量は、何ワットか。
- 1-2.  $20^\circ\text{C}$  と  $100^\circ\text{C}$  の二つの熱源で動作する熱機関の最大効率はいくらか。
- 1-3. 1 気圧  $100^\circ\text{C}$  で  $20\text{g}$  の水が、沸騰して水蒸気になった。この時のエントロピー変化を求めよ。ただし 1 気圧  $100^\circ\text{C}$  での水の蒸発熱は  $540\text{cal/g}$  である。
- 1-4. 気体の内部エネルギー  $U$  を絶対温度  $T$  と体積  $V$  の関数とみなすとき、その体積依存性に関して、以下の式が成立することを示せ。

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

ただし、 $p = p(T, V)$  は気体の圧力である。

- 1-5.  $n$  モルの単原子理想気体は、定積モル比熱  $C_V$  が定数となり、状態方程式  $pV = nRT$  に従う。ただし、 $R$  は気体定数である。この理想気体の準静的断熱過程において、圧力  $p$  と体積  $V$  との間に、ポワソンの関係式

$$pV^\gamma = \text{一定}$$

が成立することを示せ。ただし  $\gamma \equiv 1 + R/C_V$  である。必要であれば、1-4 の結果を用いてよい。

- 1-6. 状態方程式がファン・デル・ワールスの式  $(p + a/V^2)(V - b) = RT$  に従い、かつ定積モル比熱  $C_V$  が温度によらない定数であるような 1 モルの気体を考える。ただし、 $a$  と  $b$  は定数である。この気体の内部エネルギー  $U$  が、定数を除いて  $U = C_V T - a/V$  で与えられることを示せ。必要であれば、1-4 の結果を用いてよい。

問 2 体積  $V$  の容器に入った同種単原子分子  $N$  個からなる古典理想気体を考える。そのハミルトニアンは、粒子  $j$  ( $= 1, 2, \dots, N$ ) の運動量  $\mathbf{p}_j$  と粒子の質量  $m$  を用いて、次式で与えられる。

$$H = \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{p}_j^2}{2m}$$

この気体のヘルムホルツの自由エネルギー  $F$  とエントロピー  $S$  の表式を、絶対温度  $T$  と体積  $V$  の関数として求めよ。ただし、ボルツマン定数を  $k_B$  とし、また、 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ 、および、 $\ln N! \approx N \ln N - N$  ( $N \gg 1$ ) である。

問 3 質量  $m$  とスピン  $1/2$  を持つ同種粒子  $N$  個が、一辺  $L$  の立方体の箱の中に閉じ込められている。粒子間の相互作用は無視できる。この系の一粒子シュレーディンガー方程式を周期境界条件の下で解くと、一粒子エネルギーが以下のように得られる。

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad \mathbf{p} = \frac{2\pi\hbar}{L}(n_1, n_2, n_3).$$

ただし  $n_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) は整数である。

3-1. この系の一粒子エネルギー状態密度は、

$$D(\varepsilon) \equiv 2 \sum_{\mathbf{p}} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}}).$$

で定義され、 $D(\varepsilon) = A\varepsilon^\alpha$  と表せる ( $\varepsilon \geq 0$ )。比例係数  $A$  と指数  $\alpha$  の表式を求めよ。

3-2. この系の熱力学ポテンシャル  $\Omega \equiv -pV$ 、内部エネルギー  $U$ 、粒子数  $N$  の表式を、絶対温度  $T$ 、体積  $V = L^3$ 、化学ポテンシャル  $\mu$  の関数として、 $\varepsilon$  の積分形で表せ。ただし、ボルツマン定数を  $k_B$  とする。

3-3. この系の圧力  $p$  と内部エネルギー  $U$  の間に

$$pV = \frac{2}{3}U$$

の関係があることを示せ。

3-4. 高温では

$$e^{(\varepsilon - \mu)/k_B T} \gg 1$$

であることを使って内部エネルギーが、 $U = \frac{3}{2}Nk_B T$  と表されることを示せ。

3-5. 絶対零度の内部エネルギー  $U$  を、粒子数  $N$  と定数  $A$  を用いて表せ。この結果をもとに、 $N$  と  $V$  を一定に保った場合の  $U$  の温度変化の概形をグラフに描け。

## 問題 V

問 1 3次元ベクトル  $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ 、 $\vec{C} = (c_1, c_2, c_3)$  を考える。以下の設問に答えよ。

1-1. ベクトル  $\vec{A}$ 、 $\vec{B}$ 、 $\vec{C}$  が互いに独立であるための判定条件は  $x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C} = \vec{0}$  が  $x = y = z = 0$  以外の解を持たないことである。ここで  $\vec{0}$  はゼロベクトルである。このとき、ベクトルの成分が満たす関係を行列式を用いて表せ。

1-2. ベクトル  $\vec{A}$ 、 $\vec{B}$ 、 $\vec{C}$  が互いに独立であるとき、ベクトル積  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$  が満たす条件を求め、それが設問 1-1 で求めた関係式と同等であることを示せ。

問 2 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + y^n = 0$$

を境界条件  $y(0) = 1, y'(0) = 0$  のもとで解くことを考える。ここで  $n$  は  $n \geq 0$  の整数である。以下の設問に答えよ。

2-1.  $y''(0) = -\frac{1}{3}$  であることを示せ。

2-2.  $n = 0$  と  $1$  の場合に対して解と  $y = 0$  となる  $x$  の値を求めよ。

問 3 以下の定積分の値を求めよ。

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

$$(2) \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

問 4 以下の設問に答えよ。

4-1. 位置ベクトル  $\vec{r} = (x, y, z)$  と  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  ( $x_0, y_0, z_0$  は定数) で表される 2 点間の距離は  $|\vec{r} - \vec{r}_0|$  で与えられる。ガウスの定理を用いて、

$$\nabla \cdot \left( \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \right) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

であることを示せ。ここで  $\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$  はデルタ関数である。

4-2. 密度分布  $\rho(x, y, z)$  が与えられたとき、点  $(x, y, z)$  での重力ポテンシャル  $\phi$  は

$$\phi(x, y, z) = - \int_{V'} G \frac{\rho(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

で与えられる。ここで  $G$  は重力定数である。重力ポテンシャル  $\phi$  はポアソン方程式  $\Delta\phi = 4\pi G\rho$  を満たすことを示せ。

## 問題 VI

以下の問 1、問 2、問 3 から 2 問を選択し解答せよ。

問 1 惑星の温度は太陽から受け取る短波放射と惑星が射出する赤外放射とのつりあいによって決まる。このとき以下の問いに答えよ。

1-1. 惑星が射出する赤外放射が黒体放射として表される場合に、上記のつりあいによって決まる惑星の温度を平衡温度という。惑星の軌道上における太陽からの短波放射フラックスを  $S$ 、惑星の反射能 (アルベド) を  $\alpha$  としたときに、平衡温度  $T_e$  を  $S$  と  $\alpha$  を用いて表せ。ただし惑星の温度は一様であるとし、ステファン-ボルツマン定数は  $\sigma$  とする。

次に惑星に大気が存在する場合を考える。この大気は短波放射に対しては透明で、赤外放射を波長によらず一定の割合で吸収すると仮定する。このとき大気中の各層における上向き赤外放射フラックス  $F^\uparrow$  および下向き赤外放射フラックス  $F^\downarrow$  の満たす方程式は、近似的に以下のよう表される。

$$\frac{dF^\uparrow}{d\tau} = F^\uparrow - \sigma T^4, \quad (1)$$

$$-\frac{dF^\downarrow}{d\tau} = F^\downarrow - \sigma T^4. \quad (2)$$

ここで  $\tau$  は大気の光学的深さで、大気上端で 0、大気下端で  $\tau_s$  とする。  $T$  は大気温度である。境界条件は  $\tau = 0$  で  $F^\downarrow = 0$ 、  $\tau = \tau_s$  で  $F^\uparrow = \sigma T_s^4$  ( $T_s$  は地表面温度) である。以下では放射平衡が成り立つ ( $F^\uparrow - F^\downarrow = \text{一定}$ ) とする。

1-2.  $\Phi = F^\uparrow - F^\downarrow$ ,  $\Psi = F^\uparrow + F^\downarrow$  とする。式 (1)、(2) を  $\Phi, \Psi$  の満たす方程式に書き換えてから解き、大気上端の境界条件をあてはめることで

$$T^4 = T_0^4 (\tau + 1) \quad (3)$$

となることを示せ。ここで  $T_0$  は大気上端の温度である。

1-3. 1-2 で解いた  $\Phi, \Psi$  に対し大気下端の境界条件をあてはめることで、

$$T_s^4 = T_0^4 + T_1^4 \quad (4)$$

となることを示せ。ここで  $T_1$  は大気下端の温度である。

1-4. 大気上端での上向き赤外放射  $F^\uparrow$  は 1-1 で求めた平衡温度で決まる黒体放射に等しいとする。このとき地表面温度  $T_s$  と平衡温度  $T_e$  との大小関係を示せ。

1-5. 式 (4) より地表面とその直上の大気との間には温度差が生じることがわかる。このとき放射以外の熱輸送過程を考慮すると、地表面付近の大気温度はどのように決まると考えられるか説明せよ。



問 2 地球の大気・海洋のモデル方程式としてよく用いられる回転系の浅水方程式は、以下のように記述される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

ここで  $u, v$  は  $x, y$  方向の速度でそれぞれ東向きと北向きを正とする。 $h$  は流体の厚さ、 $g$  は重力加速度、 $f$  はコリオリパラメータで  $f = f_0 + \beta y$  である。ただし  $f_0, \beta$  は正定数とする。

2-1. 定常かつ  $u, v$  が小さい場合に成り立つ式 (1)、(2) の近似式を導け。またこのような流れが実際の大気中で生じている例を 1 つ挙げ説明せよ。

2-2. 式 (1)、(2)、(3) を用いてポテンシャル渦度  $(\zeta + f)/h$  の保存則

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\zeta + f}{h} \right) = 0 \quad (4)$$

が導かれることを示せ。ここで

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

である。

2-3. 南北方向に連なる大規模な山脈に西風があたると、風は山脈を越えながら南向きに蛇行し、山脈を越えると北向きに蛇行する。この理由を式 (4) を用いて説明せよ。

2-4.  $h$  が一定で  $u, v$  が小さい場合、式 (4) は以下のように近似される。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \beta v = 0. \quad (5)$$

この式で記述される波 (ロスビー波) の位相が西向きに伝播する理由を説明せよ。

問 3 次の問い 3-1 から 3-5 に 200 字程度で答えよ。

- 3-1. 宇宙における元素の合成のメカニズムは 3 つに大別される。それぞれの仕組みと合成される元素の特徴を説明せよ。
- 3-2. 地球型惑星、木星型惑星、天王星型惑星の特徴をのべよ。またそれらの違いはなぜ生じたと考えられているか説明せよ。
- 3-3. 世界の鉄資源の大部分を占める縞状鉄鉱床はいつごろ、どのようにして形成されたか説明せよ。
- 3-4. 地球では大気とその内部との間の炭素の循環によって、液体の水が存在できる状態が長期間実現してきたと考えられている。この炭素循環による気候維持のメカニズムを説明せよ。
- 3-5. 地球と木星ではどのように固有磁場が生じていると考えられているか、それぞれの内部構造に着目して説明せよ。

## 問題 VII

問 1 星間空間に多く存在する一酸化炭素分子 CO について考える。永久電気双極子モーメントをもつ分子である CO の回転遷移は電磁波を放射し、その純回転スペクトルが観測されている。二原子分子である CO を剛体直線回転子とみなしたとき、その回転のエネルギー準位は回転定数  $B$  を用いて以下で与えられる (量子数  $J$ ,  $J'$  は整数)。

$$E_J = BJ(J+1) \quad \text{ただし} \quad B = \frac{h^2}{8\pi^2 I}$$

回転遷移の個別選択則は  $\Delta J = \pm 1$  である。 $h$  はプランク定数であり  $h = 6.63 \times 10^{-34}$  (J s) である。 $I$  ( $\text{kg m}^2$ ) は慣性モーメントである。以下の設問に答えよ。

- 1-1.  $J' = 1 \rightarrow J = 0, J' = 2 \rightarrow J = 1, J' = 3 \rightarrow J = 2$  の回転遷移のエネルギーはいくらになるか。回転定数  $B$  を用いて表せ。
- 1-2. 回転のエネルギー準位  $J$  における縮退度  $g_J$  は、量子数  $m_J (= -J, -J+1, \dots, J+1, J)$  によって決まる。 $g_J$  を  $J$  を用いて表せ。
- 1-3. 二原子分子の慣性モーメントは  $I = \mu R^2$  ( $\text{kg m}^2$ ) で表される。 $\mu$  は CO の換算質量である。 $R$  は CO の核間距離である。C 原子および O 原子の質量を統一原子質量単位でそれぞれ  $M_C = 12$  (u),  $M_O = 16$  (u) とし、 $R = 1.13 \times 10^{-10}$  (m) とするとき、 $I$  ( $\text{kg m}^2$ ) を有効数字 3 桁で求めよ。ただし、 $1 \text{ u} = 1.66 \times 10^{-27}$  (kg) とする。
- 1-4. CO の  $J' = 1 \rightarrow J = 0$  の回転遷移のエネルギーを、ジュール単位 (J) を用いて有効数字 3 桁で求めよ。必要ならば、1-3. で求めた  $I$  および  $8\pi^2 = 79.0$  を用いよ。
- 1-5. 星間空間には分子雲と呼ばれる温度が 10 K 程度の冷たい領域が存在し、ここから新しい星が形成されると考えられている。分子雲に最も多く存在する分子は水素分子  $\text{H}_2$  であり、CO は  $\text{H}_2$  に次いで 2 番目である。その存在比はおよそ  $\text{H}_2 : \text{CO} = 10^5 : 1$  と  $\text{H}_2$  が圧倒的に多いが、純回転スペクトルの観測は CO の方が容易である。この理由について考えられることを 2 つ述べよ。必要ならば、ボルツマン定数  $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$  (J  $\text{K}^{-1}$ )、 $\text{H}_2$  の核間距離  $R_{\text{H}} = 7.40 \times 10^{-11}$  (m)、H 原子の質量  $M_{\text{H}} = 1$  (u) を用いて論じてもよい。

問 2 反応物 A から生成物 B へと変わる 1 次反応  $A \rightarrow B$  を考える。A の初期濃度は  $[A]_0$  である。時間  $t$  における、A, B の濃度をそれぞれ  $[A]$ ,  $[B]$  とする。

2-1. 1 次反応では、反応物の消費速度  $d[A]/dt$  と、生成物の生成速度  $d[B]/dt$  は  $[A]$  に比例する。この反応の速度定数を  $k_1$  としたとき、 $d[A]/dt$ ,  $d[B]/dt$  をそれぞれ  $k_1$ ,  $[A]$  を用いて表せ。

2-2.  $t = 0$  のとき  $[B] = 0$  とすると、 $[A]$ ,  $[B]$  は  $[A]_0$ ,  $t$ ,  $k_1$  を用いてそれぞれどのように表されるか。 $[A]$ ,  $[B]$  について解いた形で示せ。

2-3.  $[A]$  が  $[A]_0$  の半分になるまでの時間 (半減期)  $\tau$  を、 $k_1$  を用いて表せ。

放射性年代測定法の一つであるカリウム-アルゴン法について考える。カリウムには放射性同位体のカリウム  $^{40}\text{K}$  が存在する。鉱物に含まれる  $^{40}\text{K}$  は放射性崩壊によって、その 89 % はカルシウム  $^{40}\text{Ca}$  に、11 % はアルゴン  $^{40}\text{Ar}$  へ変化する。 $^{40}\text{K}$  の放射性崩壊は 1 次反応であり、半減期は約 13 億年である。 $^{40}\text{Ca}$  と異なり  $^{40}\text{Ar}$  は鉱物の形成時にはほとんど含まれないため、鉱物に含まれる  $^{40}\text{Ar}$ ,  $^{40}\text{K}$  の存在量をそれぞれ  $[^{40}\text{Ar}]$ ,  $[^{40}\text{K}]$  とすると、その存在比  $[^{40}\text{Ar}]/[^{40}\text{K}]$  から鉱物形成後の時間  $t$  を見積もることができる。

2-4.  $^{40}\text{K}$  の放射性崩壊の速度定数を  $k_2$  とする。鉱物形成時 ( $t = 0$ ) において  $[^{40}\text{Ar}] = 0$  であり、 $[^{40}\text{Ar}]$  と  $[^{40}\text{K}]$  は  $^{40}\text{K}$  の放射性崩壊のみで変化するとき、 $t$  を  $[^{40}\text{K}]$ ,  $[^{40}\text{Ar}]$ ,  $k_2$  を用いて表せ。

2-5. ある鉱物において、 $[^{40}\text{Ar}]/[^{40}\text{K}] = 0.22$  であったとき、 $t$  はおよそ何億年になるか。有効数字 2 桁で求めよ。必要ならば、 $\ln(2) = 0.69$ ,  $\ln(3) = 1.1$  を用いよ。