（平成 20 年 8 月 20 日実施）

平成21年度

北海道大学大学院理学院 量子理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験 専門科目問題（午後）

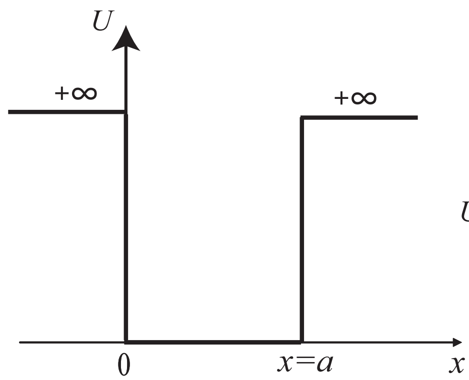
受験に関する注意

- 試験時間： 13:00〜15:30 の 2時間30分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 量子理学専攻志望者（宇宙理学専攻を併願する者を含む）： **問題**III,IVを解答すること。
- 宇宙理学専攻志望者:
  - 宇宙物理学・素粒子論・原子核理論・情報メディア科学・原子核反応データ科学を志望するものは**問題**III, IVを解答すること。
  - 宇宙物質進化論・宇宙物理化学・惑星物理学（現象と構造、起源と進化、地球流体力学）を志望するものは**問題**III, IV, V, VIの中から2つの問題を選択して解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題III	3枚
	問題IV	2枚
	問題V	2枚
	問題VI	2枚
解答紙	2問題分	4枚（各問題2枚）
草案紙	2問題分	2枚（各問題1枚）

問題 III

問 1 図のような障壁の高さが無限大で，幅が a であるような 1 次元井戸型ポテンシャル $U(x)$ に閉じ込められた質量 m の粒子を考える。以下の設問に答えなさい。



$$U(x)=\begin{cases} 0 & (0 \leqq x \leqq a) \\ \infty & \text{それ以外} \end{cases}$$

1-1. 定常状態の粒子が従うシュレーディンガー方程式を書きなさい。

1-2. この粒子の固有エネルギーと規格化された固有関数を求めなさい。

1-3. 位置の演算子 $\hat{x}$ とそれに共役な運動量演算子 $\hat{p}$ の n 番目の固有状態の期待値 $\langle\hat{x}\rangle$，$\langle\hat{p}\rangle$ を求めなさい。

次に粒子の波動関数が $\Psi(x) = Ax(a-x)$ である場合を考えよう。

1-4. この波動関数の規格化定数 A を求めなさい。

1-5. この波動関数で記述される粒子が基底状態に見出される確率を求めなさい。
ただし，$\displaystyle\int_0^{\pi} t^2 \sin t \, dt = \pi^2 - 4$ を使って良い。

問 2 質量 m で，振動数 ω の 1 次元調和振動子のハミルトニアンを考える。

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{1}$$

式 (1) で位置座標 x とそれに対応する微分演算子 $\frac{d}{dx}$ を除いた量 $\hbar$，m，ω は，このハミルトニアンのパラメータと見なせる。エネルギー固有値はこれらのパラメータを変えると変化する。ここで一般的な場合として，パラメータ λ に依存するハミルトニアン $H(x;\lambda)$ と以下のようなシュレーディンガー方程式について考える。

$$H(x;\lambda)\psi_n(x;\lambda) = E_n(\lambda)\psi_n(x;\lambda) \tag{2}$$

波動関数 $\psi_n(x;\lambda)$ は n 番目の固有値 $E_n(\lambda)$ に対応する固有関数で，規格直交化されているものとする。以下の設問に答えなさい。ただし，考察するパラメータが変化する範囲内では縮退は無いものとする。

2-1. 式 (2) の波動関数の規格直交関係を内積を使って記せ。また，それをパラメータ λ で微分することによって，

$$\langle \psi_n(x;\lambda) | \frac{\partial}{\partial \lambda}\psi_n(x;\lambda) \rangle$$

が純虚数であることを示せ。ただし，複素関数 $f(x)$ と $g(x)$ の内積 $\langle f(x)|g(x)\rangle$ は $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^* g(x)\, dx$ で定義される。

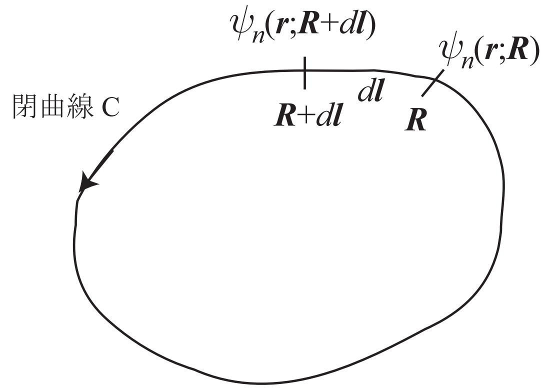
2-2. ハミルトニアンをパラメータ λ で微分した量の期待値が，次式を満たすことを証明せよ。これをヘルマン－ファインマンの定理と呼ぶ。

$$\langle \psi_n(x;\lambda)| \frac{\partial H(x;\lambda)}{\partial \lambda} |\psi_n(x;\lambda)\rangle = \frac{\partial E_n(\lambda)}{\partial \lambda}$$

2-3. ヘルマン－ファインマンの定理を用いると物理量の期待値が簡単に求められる場合がある。**2-2** のヘルマン－ファインマンの定理のパラメータ λ を ω や $\hbar$ と置いて，式 (1) の 1 次元調和振動子のハミルトニアンに適用することによって，1 次元調和振動子の n 番目の励起状態の運動エネルギーの期待値 $\langle T\rangle$ とポテンシャルエネルギーの期待値 $\langle V\rangle$ を求めよ。ただし，固有エネルギーが $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ であることを用いて良い。

次に，複数の原子核に束縛された 1 個の電子の状態について考える。この系では，式 (2) における x が電子座標 $\boldsymbol{r}$ に対応し，パラメータ λ が原子核の座標の組 $\boldsymbol{R}$ に対応する。図のようにパラメータ $\boldsymbol{R}$ を閉曲線 C にそって変化させた時の固有エネルギー $E_n(\boldsymbol{R})$ に対応する波動関数 $\psi_n(\boldsymbol{r};\boldsymbol{R})$ について考える。以下の設問に答えよ。この系のシュレーディンガー方程式は式 (3) である。ここでもパラメータが変化する範囲内では縮退は無いとする。

$$H(\boldsymbol{r};\boldsymbol{R})\psi_n(\boldsymbol{r};\boldsymbol{R}) = E_n(\boldsymbol{R})\psi_n(\boldsymbol{r};\boldsymbol{R}) \tag{3}$$



2-4. 閉曲線 C に沿った 2 つの極めて近い点 $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}+d\boldsymbol{l}$ に対応する，それぞれの波動関数を $\psi_n(\boldsymbol{r};\boldsymbol{R})$, $\psi_n(\boldsymbol{r};\boldsymbol{R}+d\boldsymbol{l})$ とするとき，この 2 つの波動関数の位相差 $d\phi$ を次式で定義する。

$$d\phi \equiv \mathrm{Arg}\langle\psi_n(\boldsymbol{r};\boldsymbol{R})\big|\psi_n(\boldsymbol{r};\boldsymbol{R}+d\boldsymbol{l})\rangle$$

ここで，Arg は複素数の偏角をとることを意味する。$d\boldsymbol{l}$ の 1 次の範囲内で，$d\phi$ が以下のように書けることを示せ。

$$d\phi = -i\langle\psi_n(\boldsymbol{r};\boldsymbol{R})\big|\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{R}}\psi_n(\boldsymbol{r};\boldsymbol{R})\rangle\cdot d\boldsymbol{l}$$

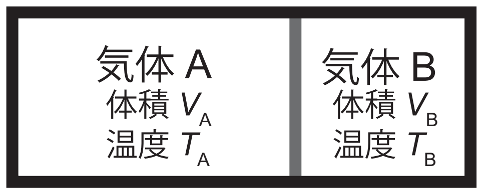
2-5. 次式のように，位相差 $d\phi$ を閉曲線 C に沿って積分したものをベリー位相 $\gamma_n(\mathrm{C})$ と呼ぶ。

$$\gamma_n(\mathrm{C}) = \oint_{\mathrm{C}} d\phi = \oint_{\mathrm{C}} -i\langle\psi_n(\boldsymbol{r};\boldsymbol{R})\big|\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{R}}\psi_n(\boldsymbol{r};\boldsymbol{R})\rangle\cdot d\boldsymbol{l}$$

このベリー位相が，波動関数 $\psi_n(\boldsymbol{r};\boldsymbol{R})$ を $\tilde{\psi}_n(\boldsymbol{r};\boldsymbol{R}) = e^{i\alpha_n(\boldsymbol{R})}\psi_n(\boldsymbol{r};\boldsymbol{R})$ のようにゲージ変換しても不変なことを示せ。ここで，$\alpha_n(\boldsymbol{R})$ は任意の連続な 1 価の実関数である。

問題 IV

問 1 図のように断熱壁で囲まれたシリンダーの内部が、気体を通さない質量および厚さの無視できる仕切り板で 2 つの分室に区切られている。左右の分室に単原子分子の理想気体 A と B がそれぞれ 1 モル封入されている。ある時刻 t_0 における気体 A と気体 B の絶対温度はそれぞれ $T_A = 3T_0$、$T_B = T_0$ であった。仕切り板は摩擦なく左右に動くことができるので、系は常に力学的な平衡に保たれるとして、以下の設問に答えよ。ただし、シリンダー内の体積は変わらないとする。



時刻 t_0 の気体の状態

1-1. 時刻 t_0 における気体 A と気体 B の体積比 V_A/V_B を求めよ。

1-2. 仕切り板が小さい熱伝導率を持っている場合、やがて 2 つの気体は熱平衡になる。平衡状態に達したときの気体 A と気体 B について、それぞれの温度 T_A と T_B を求めよ。

1-3. **1-2** の場合、時刻 t_0 から平衡状態に達する過程で、圧力が変化しないことを示せ。

1-4. 絶対温度 T、体積 V の 1 モルの理想気体のエントロピー S は次のように表されることを示せ。

$$S = N_A k_B (\frac{3}{2} \ln T + \ln V) + 定数.$$

ここで、N_A はアボガドロ数、k_B はボルツマン定数である。

1-5. **1-2** の場合、時刻 t_0 の全系のエントロピーと平衡状態に達したあとの全系のエントロピーの差を求めよ。

1-6. 仕切り板が熱を通さない場合に、一方の分室から他方の分室への熱の移動が可逆的に実行できたとして、時刻 t_0 の状態にあるこの系から引き出すことのできる最大の仕事を求めよ。

問 2 絶対温度 T の熱浴に接している体積 V の容器にほとんど独立な区別できない N 個の粒子からなる気体が閉じ込められている。粒子は、質量がゼロで、エネルギー ε と運動量の大きさ p の関係は $\varepsilon = pc$（c は真空中の光速）で与えられる。また、運動量の大きさ p と $p + dp$ の間の 1 粒子のエネルギー状態の数は $4\pi V p^2 dp/h^3$ (h はプランク定数) で与えられる。以下の設問に答えよ。ただし、必要があればスターリングの公式 $\ln N! \approx N \ln N$ を用いてよい。

2-1. この系の分配関数 Z が

$$Z = \left[\left(\frac{k_B T}{c} \right)^3 \frac{8\pi V}{h^3 N} \right]^N$$

となることを示せ。ただし、k_B はボルツマン定数である。

2-2. この気体の内部エネルギーと状態方程式を求め、単原子分子からなる通常の理想気体と比較せよ。

2-3. この系の定積熱容量 C_V を求めよ。

2-4. この系のエントロピー S を求めよ。

2-5. この系の全エネルギー E の分散 $\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle$ は

$$\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = k_B T^2 C_V$$

で表されることを示せ。ここで、$\langle\ \rangle$ は平均を表す。

問題 V

問 1 関数 $f(x)$ のフーリエ変換は、角周波数を ω として、

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

で与えられる。このとき、以下の設問に答えよ。

1-1. 関数 $f(x)$ が

$$f(x) = e^{-ax^2}$$

で与えられるとき（a は実定数で $a > 0$）、$F(\omega)$ の 1 階微分方程式を求めよ。

1-2. 関数 $f(x) = e^{-ax^2}$ の定積分が

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

となることを証明せよ。

1-3. **1-1** の微分方程式を解き、関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ。

1-4. 関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{8}x^2}$$

であるとき、フーリエ変換 $F(\omega)$ を求め、そのグラフを図示せよ。ただし、$1/e$ となる点を図中で示すこと。

問 2 ϕ を任意のスカラー場、$\mathbf{A}$ を定ベクトルとする。このとき、以下の設問に答えよ。

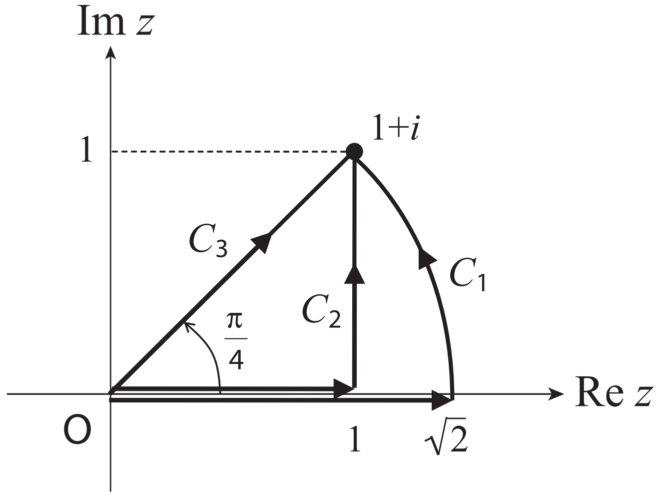
2-1. $\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{A}$ を示せ。

2-2. 閉曲線 C を縁とする任意の曲面 S について、

$$\iint_S (\mathbf{n} \times \nabla \phi)\ dS = \oint_C \phi\ d\mathbf{r}$$

となることを証明せよ。ただし、$\mathbf{n}$ は曲面 S の法線ベクトル、dS は面積要素、$\mathbf{r}$ は位置ベクトルを表す。必要であれば、任意のベクトル $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ に対して、$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ の関係が成り立つことを用いて良い。

問 3 図に示すように、複素平面 z 上において原点 O から $1+i$ に至る積分路を C_1, C_2, C_3 とする。このとき、以下の設問に答えよ。



3-1. それぞれの積分路に沿った複素積分

$$I_k = \int_{C_k} z\ dz \qquad (k=1,2,3)$$

を求めよ。ただし、I_1, I_2, I_3 のそれぞれについて、経路に沿った積分を実行し、その計算過程を示すこと。

3-2. **3-1** の複素積分 I_1, I_2, I_3 の間に成り立つ関係を示し、その理由を答えよ。

問題 VI

問 1 恒星はガス球であり、中心部は高温高密度で完全に電離しており、ガスの密度が大きくなると先ず電子が縮退する。完全に縮退した電子ガスでは、運動量の大きさが p と $p+dp$ にある単位体積中の電子数 $n(p)dp$ は、限界運動量を p_0 とすると、

$$n(p)dp = \begin{cases} \frac{8\pi p^2}{h^3}dp & (p \leq p_0) \\ 0 & (p > p_0) \end{cases}$$

で与えられる。ここで、h はプランク定数である。また、完全縮退した電子ガスは理想気体とみなすことができ、圧力 P は、電子の速さを v とすると

$$P = \frac{1}{3}\int_0^\infty vpn(p)dp$$

で与えられる。以下の設問に答えよ。

1-1. 電子の数密度を n_e とするとき、限界運動量 p_0 はいくらか。

1-2. 電子とイオンからなるガスの密度を ρ、電子一個あたりのガスの平均分子量が μ_e であるとき、電子数密度 n_e を ρ を用いて表せ。ここで 原子質量単位を m_u とせよ。

1-3. 電子の運動が非相対論的、すなわち、$p = m_\mathrm{e}v$ (m_e は電子の質量) の場合と、超相対論的、すなわち $v = c$ (c は光速) と近似できる場合のそれぞれ対して、完全縮退電子気体の圧力（縮退圧）を ρ を用いて表せ。

1-4. 状態方程式が ポリトロピックな関係式 $P = K\rho^{1+1/n}$ (K は比例定数、n はポリトロピック指数) で与えられる重力平衡にあるガス球に対して、$1 < n < 3$ の時には、ガス球の質量 M と半径 R の間には、$R^{3-n} \propto 1/M^{n-1}$ の関係が成り立つ。一方、$n = 3$ の場合には、質量は半径によらない。この事から、電子の縮退圧で重力平衡にあるガス球（白色矮星）に対してどの様なことが言えるかを簡潔に述べよ。

問 2 ある位置 $\mathbf{r} = (x、y、z)$ で $(\theta、\phi)$ 方向に伝播する光の強度 $I_\nu(\mathbf{r};\theta、\phi)$ は、位置 $\mathbf{r}$ にある微小面積要素 $d\sigma$ を通って $(\theta、\phi)$ 方向の微小立体角 $d\Omega$ 内に単位時間に流出する振動数が ν と $\nu + d\nu$ の間にある光のエネルギーは $I_\nu d\nu \cos\theta d\sigma d\Omega$ で与えられると定義されている。ここで、 θ は光の進行方向と $d\sigma$ の法線がなす角であり、ϕ は方位角である。単位時間に単位面積を通過する光のエネルギー量 (フラックス)F_ν は、I_ν を用いて、$F_\nu(\mathbf{r}) = \int I_\nu(\mathbf{r};\theta,\phi)\cos\theta d\Omega$ で与えられる。吸収係数 κ_ν, 放射係数 ϵ_ν の媒質中（散乱がない場合）を光が伝播するとき、伝播経路 s に沿っての I_ν の変化は、輻射輸送方程式

$$\frac{dI_\nu(s)}{ds} = -\kappa_\nu(s)I_\nu(s) + \epsilon_\nu(s)$$

で与えられる。以下の設問に答えよ。

2-1. 光の伝播経路にそっての光学的厚さ $\tau_\nu(s) = \int_0^s \kappa_\nu(s')ds'$ を変数としたとき、輻射輸送方程式は、

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu$$

となることを示せ。ここで S_ν は $S_\nu = \epsilon_\nu/\kappa_\nu$ で定義される源泉関数である。

2-2. 前問で与えられた輻射輸送方程式の形式解 (光学的厚さ τ_ν での強度 I_ν) を求めよ。この時、$\tau_\nu = 0$ での光の強度を $I(0)$ とせよ。

2-3. 光が伝播する媒質が温度 T の熱平衡状態にあるとき、S_ν はプランク関数 $B_\nu(T)$ となる。この根拠を簡潔に述べよ。

次に温度 T で熱平衡状態にある半径 R の一様なガス球を考える。ガス球の中心を通る経路に沿っての光学的厚さを τ_ν とする。外部からガス球に入射する光はないとして以下の設問に答えよ。

2-4. ガス球の中心 O から距離 $b(< R)$ の点を P、P を通って OP に垂直な直線が球の表面と交わる点をそれぞれ A、B とし、OA と PA のなす角を θ とする。経路 AB の光学的厚さを τ_ν と θ を用いて表わし、A 点での光の強度 $I_\nu(\theta)$ をもとめよ。

2-5. A 点を通って外側に放出されるフラックス F_ν を求めよ。