（平成 18 年 8 月 24 日実施）

平成 19 年度

北海道大学大学院理学院　量子理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午前）

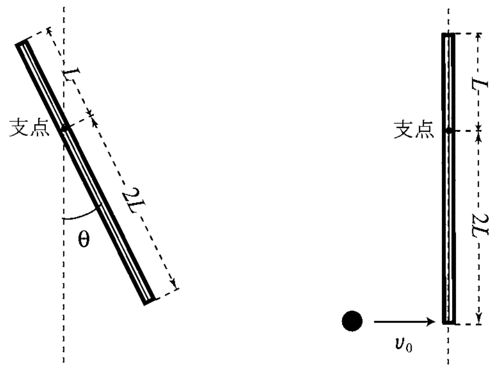
受験に関する注意

- 試験時間：　9:00〜11:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 量子理学専攻志望者・宇宙理学専攻志望者とも**問題 I, II** を解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 I	2 枚
	問題 II	2 枚
解答紙	問題 I, II	4 枚（各問題 2 枚）
草案紙	問題 I, II	2 枚（各問題 1 枚）

問題 I

問 1 図のように、長さ $3L$ の一様な細い剛体棒の端から L の点を支点とする鉛直面内での回転運動を考える。剛体棒の質量を M、鉛直線から反時計回りの方向にはかった回転位置の角度変数を θ、重力加速度を g とするとき次の問いに答えよ。ただし、空気抵抗および支点における摩擦は無視できるものとする。



はじめに、図 1-1 のように剛体棒のみの場合について考える。一様な細い剛体棒の慣性モーメント I は、棒の線密度を ρ、支点からの距離を r として $I = \int r^2 \rho dr$ となる。

1-1. 棒の線密度 ρ を求め、棒の支点のまわりの慣性モーメントが $I = ML^2$ であることを示せ。

1-2. 角度変数 θ を用いて系の運動エネルギー T と位置エネルギー U を表せ。ただし、$\theta = 0$ で $U = 0$ であるとする。

1-3. 棒の支点のまわりの力のモーメント N を角度変数 θ の関数として表せ。また、角度変数 θ に関する運動方程式を求めよ。

1-4. 時刻 $t = 0$ における初期条件を $\theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = \omega_0$ とする。初めの角速度 ω_0 が小さいときには、剛体棒は振動運動をするが、ω_0 が大きくなると回転運動をする。剛体棒が回転運動をするのに必要な ω_0 の大きさを求めよ。

次に、図 1-2 のようにこの剛体棒が静止しているときに、剛体棒と同じ質量 M の小物体が飛んできて剛体棒の下端に速度 v_0 で水平に衝突した。

1-5. 飛んできた物体と剛体棒が一体になった場合、剛体棒が振動ではなく回転をするために必要な衝突前の小物体の速度 v_0 の条件を求めよ。

1-6. 飛んできた物体と剛体棒がはねかえり係数 e で衝突し剛体棒のみが微小振動をした場合、$v_0^2/gL \ll 1$ として剛体棒の振動の周期を求めよ。

問 2 ばねとおもりからなる系の連成振動について考える。

はじめに、図 2-1 のように 2 つの等しい質量 m の質点を、質量の無視できる 3 つのばね（ばね定数 k）で連結する場合を考える。2 つの質点の運動は 1 次元に制限されており、それぞれのつりあいの位置からの変位を u_1, u_2 とする。

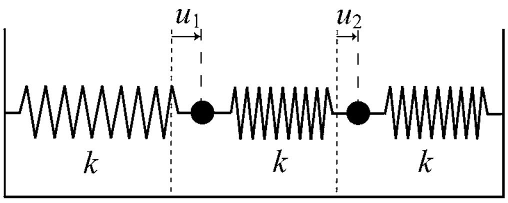


図2-1

2-1. この系の運動エネルギー T と位置エネルギー U を与えよ。また、u_1, u_2 に関する運動方程式をたてよ。

2-2. 運動方程式の解を $u_1(t) = A_1 \cos \omega t$, $u_2(t) = A_2 \cos \omega t$ と仮定し (A_1, A_2, ω は定数)、これが解となるような 2 つの基準振動の振動数 ω を求めよ。

2-3. 2 つの基準振動におけるそれぞれの振幅 A_1, A_2 の比を求め、振動の様子を図示せよ。

次に、図 2-2 のように質量 m の N 個の質点をばね定数 k の $N+1$ 個のばね（質量は無視できる）で連結する場合を考える。質点の運動は 1 次元に制限されており、左から n 番目の質点のつりあいの位置からの変位を u_n とする。

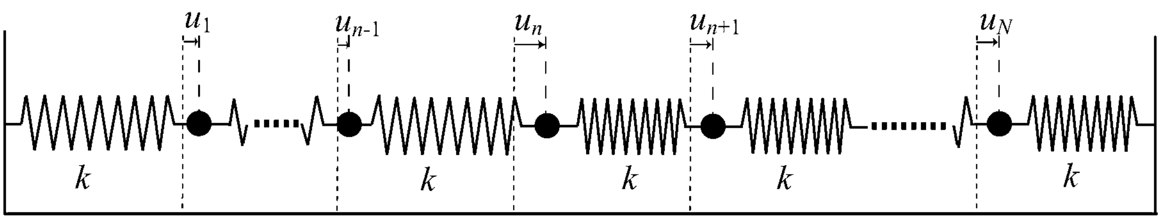


図2-2

2-4. n 番目の質点が満たすべき方程式を求めよ。

2-5. この系の基準振動を求める。運動方程式の解を $u_n(t) = A_n \cos \omega t$ と仮定し (A_n, ω は定数)、A_n に関する連立方程式を求めよ。また、基準振動の振幅を $A_n = C \sin pn$ として（C は定数）取り得る p の値を求め、さらにそれを用いて振動数 ω を表せ。

2-6. 最後に連続極限を考える。平衡状態にあるときの図 2-2 の質点間の間隔を a とし、3 つの量 $\rho = m/a$, $Y = ka$, $L = (N+1)a$ を一定に保ったまま $a \to 0$ の極限を考える。この場合、n 番目の質点のつりあいの位置 $x = na$ は連続変数にとってよい。$u_n(t) = u(x, t)$ とするとき、$u(x, t)$ の満たす方程式を求めよ。

問題 II

問 1 以下の設問に答えよ。

1-1. 空気中に置かれた半径 a の誘電率 ϵ を持つ誘電体球内に全電荷 Q が一様に分布している。ガウスの法則を使って、球の中心 O から距離 r の点での球内及び球外の電場を求めよ。但し空気の誘電率は ϵ_0 とせよ。

1-2. 図 1 のように、大きさ I の定常電流が流れている直線状の導線と、そこから距離 R にある点 P がある。この電流が作る磁場のうち、点 P を見込む角が θ_1, θ_2 である点 A、B を端点に持つ導線部分を流れる電流の寄与を考える。ビオ・サバールの法則を使って、この部分の電流が点 P に作る磁場の大きさが

$$H_{\rm AB}({\rm P}) = \frac{I}{4\pi R}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

となることを示せ。またこの磁場の向きを答えよ。必要ならば図中の座標系を用いてよい。

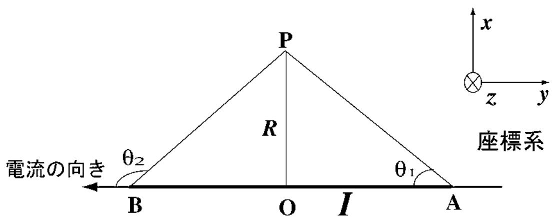


図 1

1-3. 図 2 のように、1 辺の長さが a の正方形の導線回路 ABCD に大きさ I の定常電流を流したとき、中心軸上 z の距離の点 P に作られる磁場の大きさと向きを求めよ。（但し、図中の補助記号は最終結果に使用せずに、z, a, I を使って表せ。）

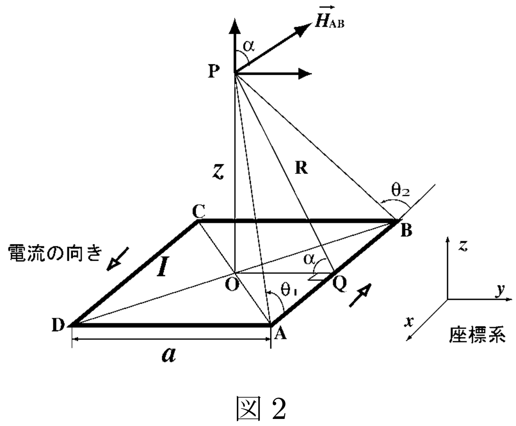
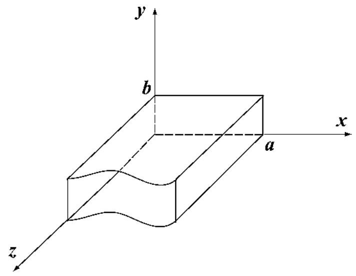


図 2

問 2 図のように、x 軸方向に長さ a、y 軸方向に長さ b を持ち、z 軸方向に無限に長い完全導体で囲まれた、一様な媒質中を伝播する電磁波について考える。媒質の誘電率を ϵ、透磁率を μ として以下の問に答えよ。



2-1. 一様な媒質中で電荷も電流も無いとき、角周波数 ω で振動している電場と磁場は、$\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = \boldsymbol{E}(x,y,z)e^{i\omega t}$、$\boldsymbol{H}(x,y,z,t) = \boldsymbol{H}(x,y,z)e^{i\omega t}$ と変数分離できる。このときマックスウェル方程式から次のヘルムホルツ方程式が成り立つことを示せ。

$$\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{E}(x,y,z) + \omega^2\epsilon\mu\boldsymbol{E}(x,y,z) = 0 \tag{1}$$
$$\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{H}(x,y,z) + \omega^2\epsilon\mu\boldsymbol{H}(x,y,z) = 0 \tag{2}$$

次に電磁波が z 軸方向に伝播定数 β で伝播する場合を考える。このとき電磁場の空間成分を z 軸に垂直な成分と平行な成分に分解して次のように表す。

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = \boldsymbol{E}(x,y)e^{-i(\beta z-\omega t)} = [\boldsymbol{E}_\perp(x,y) + \boldsymbol{e}_z E_z(x,y)]e^{-i(\beta z-\omega t)}$$
$$\boldsymbol{H}(x,y,z,t) = \boldsymbol{H}(x,y)e^{-i(\beta z-\omega t)} = [\boldsymbol{H}_\perp(x,y) + \boldsymbol{e}_z H_z(x,y)]e^{-i(\beta z-\omega t)}$$

ここで添え字 $\perp$ は z 軸に垂直な成分についての量を意味する。また、$\boldsymbol{e}_z$ は z 軸方向の単位ベクトルである。

2-2. z 軸に垂直な成分 $\boldsymbol{E}_\perp$、$\boldsymbol{H}_\perp$ は E_z、H_z を用いて次式のように表現できることを示せ。

$$\boldsymbol{E}_\perp(x,y) = \frac{-i}{\beta_\perp^2}\left(\beta\boldsymbol{\nabla}_\perp E_z(x,y) - \omega\mu\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{\nabla}_\perp H_z(x,y)\right) \tag{3}$$
$$\boldsymbol{H}_\perp(x,y) = \frac{-i}{\beta_\perp^2}(\omega\epsilon\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{\nabla}_\perp E_z(x,y) + \beta\boldsymbol{\nabla}_\perp H_z(x,y)) \tag{4}$$

ここで $\boldsymbol{\nabla}_\perp = \boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}$ であり、$\boldsymbol{e}_x$ と $\boldsymbol{e}_y$ はそれぞれ x 軸、y 軸方向の単位ベクトルである。また $\beta_\perp^2 = \omega^2\epsilon\mu - \beta^2$ である。

2-3. 前問から $\boldsymbol{E}_\perp$、$\boldsymbol{H}_\perp$ は E_z から決まる部分、H_z から決まる部分に分解できることがわかる。E_z から決まる部分を TM 波と呼ぶ。今、図のような完全導体に囲まれた媒質中を伝播する TM 波の E_z が従うべき方程式と境界条件を述べよ。実際に解く必要はない。